

Résolution empirique de l'énigme de choix de portefeuille

Oussama Chakroun, Georges Dionne et Amélie Dugas-Sampara

HEC Montréal

Avril 2006

(Version préliminaire, à ne pas citer)

Résumé :

Nous revoyons l'énigme de choix de portefeuille soulevée par Canner, Mankiw et Weil (1997). L'idée est de tester la conclusion de Elton et Gruber (2000) : un ratio obligations/actions décroissant par rapport à la tolérance au risque ne signifie pas nécessairement une contradiction par rapport à la théorie moderne de choix de portefeuille.. Dans une première étape, il est nécessaire de tester si la proportion détenue par un individu en actions présente une bonne mesure de sa tolérance au risque. La deuxième étape consiste à vérifier l'existence du théorème de séparation en deux fonds en adoptant des tests basés sur la simulation (à la manière de Beaulieu, Dufour et Khalaf (2003)) : en cas d'existence, il serait aisé d'affirmer l'absence de l'énigme de choix de portefeuille. Disposant de données relatives à la composition du portefeuille de 470 clients d'une firme de courtage canadienne, nous obtenons que le ratio obligations/actions est décroissant par rapport à la tolérance au risque. Nous testons, également, la séparation dans l'ensemble des données disponibles aux investisseurs de notre échantillon.

Introduction :

Maximiser le rendement de son portefeuille tout en minimisant le risque est toujours le problème à résoudre autant sur le plan pratique que théorique. En effet, on assiste depuis le début des années 50 à une panoplie de modèles théoriques se fixant pour objectif la résolution de ce problème de choix de portefeuille. Afin d'atteindre cet objectif, plusieurs hypothèses simplificatrices ont été considérées tel que l'existence d'un marché sans frictions. Markowitz (1952), quant à lui, a considéré un modèle mono périodique qui tient compte de la variance des rendements comme mesure de risque. Ceci revient à supposer une fonction d'utilité quadratique pour l'investisseur ou des rendements suivant des distributions elliptiques.

On se propose dans ce travail de tester l'optimalité du choix des individus, à la manière de Canner, Mankiw et Weil (1997) et de Elton et Gruber (2000), en considérant comme référence ce modèle de moyenne-variance de Markowitz (1952). On présentera dans un premier temps une revue de la littérature traitant de l'énigme de choix de portefeuille. On exposera, par la suite, les résultats obtenus d'une base de données originale indiquant la composition du portefeuille de 470 investisseurs canadiens. Finalement, on essayera de tester la présence du théorème de séparation.

1- Revue de la littérature :

Rappelons que le paradoxe cité par Canner et al. (1997) consiste à une divergence entre les recommandations de certains conseillers financiers, d'une part, et l'allocation optimale préconisée par la théorie financière moderne. En effet, l'observation d'un ratio obligations/actions décroissant en fonction de la tolérance au risque (mesurée par la proportion investie en actions) a permis à ces auteurs de conclure à une contradiction avec les consignes du théorème de séparation à deux fonds (stipulant la détention d'un ratio obligations/actions constant pour tous les niveaux de tolérance au risque).

Démontrant que l'observation d'une courbe décroissante du ratio obligations/actions en fonction de la tolérance au risque pourrait être en conformité avec la théorie financière moderne, Elton et Gruber (2000) ont abouti à la conclusion que les allocations suggérées par certains conseillers financiers¹ pouvaient être qualifiées d'optimales dans le plan moyenne-variance. Cette disparité par rapport aux conclusions de Canner et al. (1997) provient essentiellement du contexte considéré : l'existence ou non d'un actif sans risque, la possibilité ou non de ventes à découvert.

Parmi les règles gouvernant le marché, on cite la possibilité ou non de ventes à découvert. En effet, passer du cas autorisant les ventes à découvert au cas qui les interdit est de nature à engendrer une multitude de changements. Une première conséquence consiste au rétrécissement du nombre de combinaisons possibles pour l'investisseur. La deuxième conséquence de ce changement est relative à la détermination des combinaisons optimales du point de vue moyenne-variance pour ce même investisseur. Il à noter à cet égard que l'interdiction des ventes à découvert est de nature à compliquer la résolution de ce problème de choix du portefeuille. En effet, la solution analytique retrouvée dans un cadre autorisant les ventes à découvert cesse d'être valable en imposant une contrainte interdisant la détention de proportions négatives dans chacun des actifs financiers. Dans un tel cas, l'unique alternative pour résoudre les problèmes d'allocation optimale consisterait à une résolution via des méthodes numériques.

Certes la possibilité de ventes à découvert serait préférée pour les raisons citées ci haut; toutefois, il ne faut pas perdre de vue les pratiques courantes sur les marchés financiers. En effet, il est rarissime de retrouver des marchés autorisant les ventes à découvert pour les individus. Également, il s'agit d'une pratique défendue chez le courtier d'où parviennent les données de notre étude. Ceci est dû principalement aux coûts supplémentaires qu'engendre une position courte dans un titre financier ainsi qu'aux risques additionnels pour son détenteur. Ces risques sont d'autant plus importants en présence de marchés peu liquides. Notons finalement que Jones et Lamont (2002) et Lamont (2004) ont confirmé

¹ Il s'agit de Fidelity, Jan Bryant Quinn, Merrill Lynch et les recommandations du New York Times. Tous ces conseillers étaient considérés par le travail de Canner et al. (1997).

l'existence des contraintes interdisant les ventes à découvert dans certains marchés financiers; ce constat est fondé sur l'observation de plusieurs titres excessivement surévalués sur ces marchés².

Intéressons nous maintenant à l'hypothèse d'existence d'un actif sans risque. Le fait qu'il y ait un actif sans risque ou non importe peu pour la résolution du problème du choix de portefeuille si on suppose la possibilité de ventes à découvert. En effet, il serait possible de déterminer analytiquement les combinaisons optimales à choisir pour tout niveau de risque. Discutons, d'un point de vue pratique, de l'existence d'un tel actif sur les marchés financiers. Malgré l'existence d'un très grand nombre d'obligations corporatives ou gouvernementales offrant un taux d'intérêt nominal constant sur les marchés, il serait dangereux d'affirmer la présence d'un actif sans risque dans l'économie. En effet, la fluctuation des taux d'inflation induit une variation de la rémunération (en termes réels) offerte par ces obligations à travers le temps. Toutefois, le fait de s'intéresser à un horizon de temps court pourrait être synonyme d'une faible variation du taux d'inflation et par conséquent, en faveur de l'hypothèse d'existence d'un actif sans risque.

Examinons l'implication de chacun de ces contextes sur l'allocation optimale de la richesse ou plus précisément sur la variation du ratio obligations/actions en fonction de la tolérance au risque. En présence d'un actif sans risque et en ayant la possibilité de ventes à découvert, il faut s'attendre à un ratio obligations/actions constant pour tous les individus (peu importe leur niveau de tolérance au risque). Ce ratio sera une fonction monotone³ (croissante ou décroissante) en considérant les rendements en terme réels (synonyme d'absence de l'actif sans risque dans une économie avec inflation). L'interdiction des ventes à découvert, quant à elle, aura pour effet deux variations possibles : soit un ratio obligations/actions décroissant pour tout niveau de tolérance au risque, soit un ratio croissant pour des niveaux de tolérance relativement faibles mais décroissant par la suite.

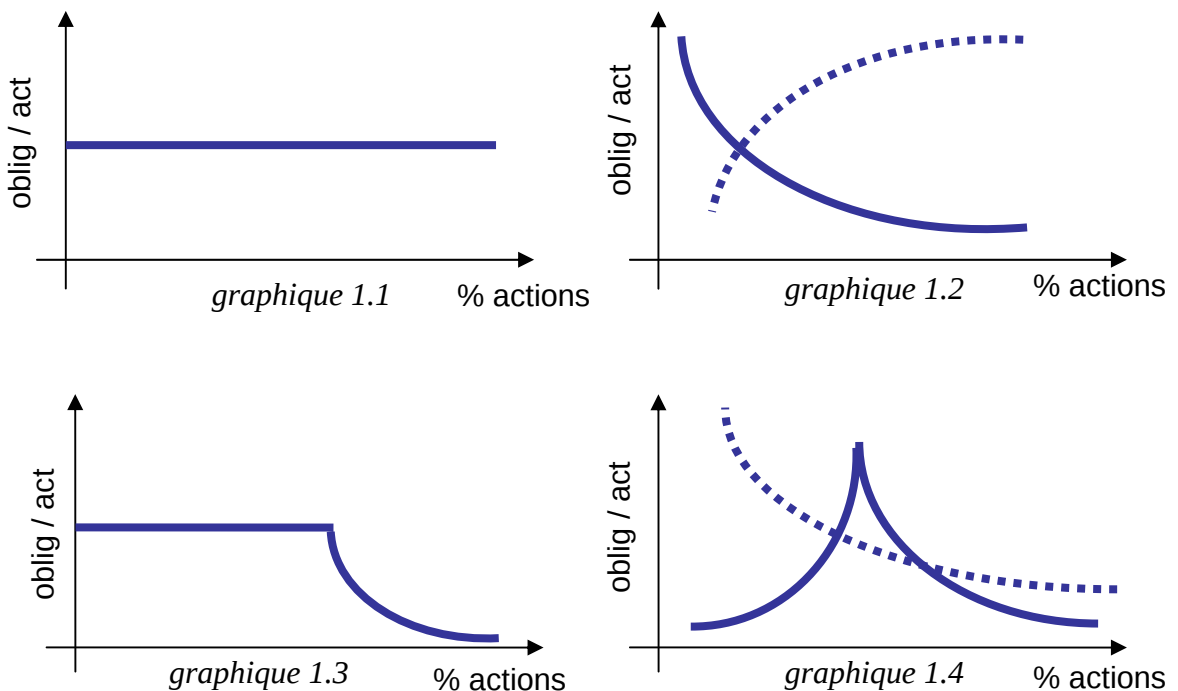
² Jarrow (1980) a démontré, via un modèle théorique, que la contrainte interdisant les ventes à découvert implique une hausse du prix des actifs risqués si tous les individus considèrent la même matrice de variance-covariance.

³ Résultat obtenu à partir du théorème 1 de Roll (1977).

Ainsi, comme le souligne Elton et Gruber (2000), l'observation d'une pente négative du ratio obligations/actions en fonction de la tolérance au risque ne devrait pas être synonyme de non optimalité du choix des investisseurs. Au contraire, les contextes théoriques menant à ce constat semblent plus proches de la pratique notamment en matière d'interdiction des ventes à découvert.

Graphique1 : L'effet de la possibilité de vente à découvert et de l'existence de l'actif sans risque sur le choix de portefeuilles optimaux

(Les différents contextes étudiés par Elton et Gruber (2000))



graphique 1.1 : possibilité de vendre à découvert et existence de l'actif sans risque

graphique 1.2 : possibilité de vendre à découvert et absence de l'actif sans risque

graphique 1.3 : interdiction de vendre à découvert et existence de l'actif sans risque

graphique 1.4 : interdiction de vendre à découvert et absence de l'actif sans risque

Finalement, notons que Boyle et Gurthie (2005) ont tenté d'apporter des éléments de réponse à l'énigme de choix de portefeuille et ce en considérant le capital humain. Ils aboutissent à la conclusion que la corrélation entre le rendement des actions et le capital humain pourrait engendrer un ratio obligations/actions décroissant en fonction de la

tolérance au risque en dépit d'un contexte autorisant la vente à découvert et offrant un actif sans risque.

2- Données et résultats :

Cherchant à résoudre à résoudre cette énigme de choix de portefeuille soulevé par Canner et al. (1997), on a utilisé sur des données obtenues auprès d'une firme de courtage canadienne spécialisée dans les services financiers aux particuliers. L'originalité de cette base de données est qu'elle contient les positions individuelles choisies plutôt que les produits offerts par les courtiers comme dans Canner et al. (1997). En effet, ces données indiquent la composition du portefeuille⁴ de 470 clients de cette firme durant le mois de juillet 2000 ainsi que leurs caractéristiques individuelles tel que l'âge, les connaissances en matière de placement, les revenus, les objectifs de placement...

Le tableau qui suit présente une description statistique des ces données.

Tableau.1 : Statistiques descriptives des données

	Moyenne	Écart type
Âge	54	13
Revenu (\$)	48 034	52 390
Montant du portefeuille (\$)	91 857	153 494
Objectif en actifs à revenu	42%	31%
Objectif en actifs de croissance	49%	29%
Objectif en actifs spéculatifs	9%	18%
Pondération en actions	57%	38%
Pondération en obligations	38%	40%
Pondération en liquidités	5%	7%
Ratio obligations/actions	0.77	2.52

⁴ Le portefeuille est réparti entre trois classes d'actifs à savoir les bons du trésor, les obligations et les actions.

Par ailleurs, 58.2% des ces individus pensent disposer de connaissances passables en matière de placement. La proportion de ceux ayant une bonne connaissance s'élève à 33.9% alors que ceux admettant une excellente connaissance représentent 3.7% de l'échantillon. Le 4.2% restant de ces individus ne dispose d'aucune connaissance en la matière.

Également, une répartition de cet échantillon d'individus par rapport à leur richesse totale (le total des biens mobiliers et immobiliers détenus par chacun d'entre eux⁵) laisse voir les proportions suivantes :

Tableau.2 : Distribution de l'avoir total net des investisseurs

Avoir total net (en 1000\$)	Moins de 25	25 à 50	50 à 100	100 à 250	250 à 500	Plus de 500
Proportion	4%	5%	13%	37%	27%	14%

Un autre aspect auquel on s'est intéressé concerne les types de comptes détenus par ces clients. En effet, cette donnée pourrait mieux nous informer quant à l'aversion au risque de chacun des individus. Les observations recueillies laissent voir que tous les clients détiennent un compte comptant. Parmi ces clients, 67% ont également un compte de fonds de pension; 15% détiennent un compte de marge et 2% ont à la fois un compte de marge et un compte de fonds de pension.

Une dernière donnée susceptible d'influencer le choix en matière de placement concerne le conseiller financier avec qui chacun des clients fait affaire. Dans notre cas, les 470 individus retenus se réfèrent à 4 conseillers financiers. Le tableau suivant indique la proportion des clients détenus par chaque conseiller ainsi qu'une brève description le concernant.

⁵ Pour le bien détenu conjointement, seule la proportion appartenant à l'investisseur est calculée dans son actif net.

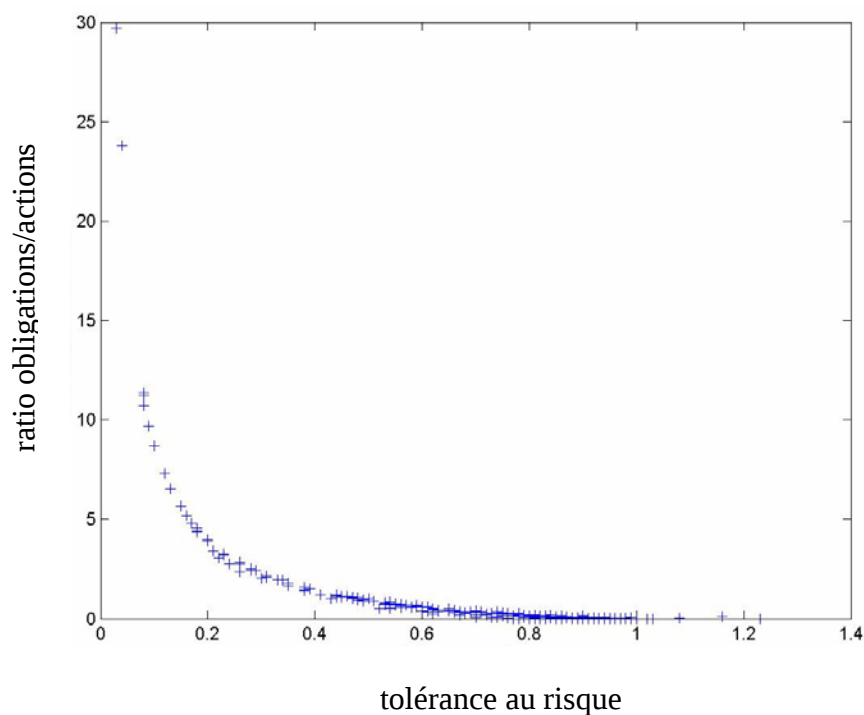
Tableau.3 : Distribution des clients en fonction des conseillers financier

	Proportion	Description
Conseiller 1	27%	Jeune conseiller, 3 ans d'expérience
Conseiller 2	54%	10 ans d'expérience ayant une clientèle étendue
Conseillers 3&4	19%	15 ans d'expérience ayant une clientèle aisée

Notons à cet égard que les clients des conseillers financier 3 et 4 ont été jumelés puisque ces deux conseillers travaillent ensemble, ont le même type de gestion et le même type de clients (âge, richesse,...)

En se basant sur notre base de données, il est aisé de représenter graphiquement les ratios obligations/actions détenus par 358 des 470 clients⁶ et ce en fonction de leur degré de tolérance au risque, approximé par la proportion investie en actions (voir graphique2).

Graphique2 : Évolution du ratio obligations/actions en fonction du degré de tolérance au risque



⁶ Certains clients ne détiennent pas d'actions dans leur portefeuille. Il devient impossible, ainsi, de calculer leur ratio obligations/actions.

L'observation du graphique2 laisse voir une pente négative du ratio obligations/actions par rapport à la tolérance au risque. Toutefois, ce constat ne devrait pas impliquer une confirmation du paradoxe cité ci haut. En effet, et comme étape préliminaire de notre étude, il est judicieux de vérifier si la proportion investie en actions représente une bonne mesure de tolérance au risque. Un deuxième indice de tolérance au risque " $T(ind)$ " est ainsi calculé pour chacun des clients et se base sur ses objectifs de placement.

$$T(ind) = \frac{1 * rev\% + 2 * croiss\% + 3 * spéc\%}{3} \quad \text{où} \quad \frac{1}{3} \leq T(ind) \leq 1 \quad (1)$$

$T(ind)$: deuxième mesure de tolérance au risque⁷

rev : objectif de placement en titres à revenu (en pourcentage du portefeuille total)

croiss : objectif de placement en titres de croissance (en pourcentage du portefeuille total)

spéc : objectif de placement en titres de spéculation (en pourcentage du portefeuille total)

Avec $rev\% + croiss\% + spéc\% = 100\%$

À titre indicatif, notons que la moyenne de ce deuxième indice de tolérance au risque s'élève à 56% pour l'ensemble des individus considérés (contre une moyenne de 57% en considérant la mesure directe de tolérance au risque).

Une fois cette mesure indirecte de tolérance au risque mesurée, on mène les régressions suivantes afin de tester l'équivalence entre les deux mesures.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 T(dir) + \beta_2 Z + \varepsilon \quad (R1)$$

$$Y = \beta_3 + \beta_4 T(ind) + \beta_5 Z + \varepsilon \quad (R2)$$

où

Y : proportion investie en obligations⁸

⁷ Qualifiée de mesure indirecte de tolérance au risque.

⁸ On a utilisé la proportion investie en obligations comme variable à expliquer afin d'inclure la totalité des observations (les 470 clients). En effet, le recours au ratio obligations/actions comme variable à expliquer diminuera de 24% le nombre d'observations.

T(dir) : mesure directe de tolérance au risque, approximée par la proportion investie en actions

T(ind) : mesure indirecte de tolérance au risque

Z : vecteur des caractéristiques individuelles de chaque investisseur tel que l'âge, le revenu, le montant du portefeuille, les connaissances en placement...

Les résultats de ces deux régressions se résument comme suit :

Tableau.4 : Résultats de la régression en utilisant la mesure directe de tolérance au risque

$$Y = \beta_0 + \beta_1 T(dir) + \beta_2 Z + \varepsilon \quad (R1)$$

Variabes indépendantes	Coefficient (statistique t)
Constante ⁹	0.984* (43.450)
<i>T(dir)</i>	-1.0509* (-105.455)
Âge	0.0002 (0.934)
Revenu	0.0001 (1.024)
Actif (0 à 25)	-0.0027 (-0.152)
Actif (25 à 50)	-0.0104 (-0.688)
Actif (50 à 100)	0.0014 (0.123)
Actif (250 à 500)	0.0007 (0.085)
Actif (plus de 500)	0.0032 (0.266)
Montant du portefeuille	-0.0001* (-2.985)
Conseiller financier 1	-0.0043 (-0.489)
Conseillers financier 3&4	-0.0089 (-0.891)
Compte de fonds de pension	-0.0194* (-2.472)
Compte marge	0.0212* (1.983)
Connaissance excellente	0.0021 (0.121)
Connaissance passable	0.0032 (0.435)
Connaissance aucune	-0.0132 (-0.739)

$$R^2 = 97.4\%$$

* Significatif à un degré de confiance de 95%

⁹ Les variables dichotomiques suivantes font partie de la constante : conseiller financier 2, connaissance bonne, compte marge et de fonds de pension ainsi qu'actif (100 à 250).

Tableau.5 : Résultats de la régression en utilisant la mesure indirecte de tolérance au risque

$$Y = \beta_3 + \beta_4 T(ind) + \beta_5 Z + \varepsilon \quad (R2)$$

Variables indépendantes	Coefficient (statistique t)
Constante ¹⁰	0.9300* (6.221)
$T(ind)$	-1.2080* (-7.895)
Âge	0.0031 (1.934)
Revenu	-0.0005 (-1.091)
Actif (0 à 25)	0.1100 (1.221)
Actif (25 à 50)	0.0541 (0.079)
Actif (50 à 100)	0.0583 (1.004)
Actif (250 à 500)	0.0244 (0.546)
Actif (plus de 500)	0.0998 (1.641)
Montant du portefeuille	0.0006* (3.436)
Conseiller financier 1	-0.1300* (-2.824)
Conseillers financier 3&4	0.0104 (0.204)
Compte de fonds de pension	0.0083 (0.211)
Compte marge	-0.0857 (-1.598)
Connaissance excellente	-0.016 (-1.792)
Connaissance passable	0.0659 (1.764)
Connaissance aucune	-0.0035 (-0.037)

$$R^2 = 33.5\%$$

* Significatif à un degré de confiance de 95%

¹⁰ Même remarque que pour la régression (R1).

Finalement, le test d'équivalence des deux mesures de tolérance (comparaison entre les paramètres $\hat{\beta}_1$ et $\hat{\beta}_4$) indique leur similitude au seuil de confiance de 95%. Ce constat est réaffirmé, par la suite, en s'assurant que les résultats obtenus ne sont pas dus à aucun problème de spécification économétrique.

Ainsi, la proportion investie en actions est une bonne mesure de tolérance au risque et ne peut être avancée comme explication plausible au paradoxe soulevé par Canner et al. (1997).

Partant de ce constat, on se propose d'analyser la variation du ratio obligations/actions par rapport à la tolérance au risque de chacun des 470 clients. Ainsi, on cherche à expliquer le choix de portefeuille des individus par leur tolérance respective au risque et certaines autres variables caractérielles (âge, revenu annuel...). Cette analyse est réalisée en deux étapes afin de contourner le problème du ratio obligations/actions infini pour un grand nombre de clients. En premier lieu, on estime la proportion investie en obligations selon le modèle suivant :

$$Y = \beta_0 + \beta_1 T(dir) + \beta_2 Z + \varepsilon \quad (2)$$

Une fois les paramètres de cette régression obtenus, il est aisé de vérifier si le ratio obligations/actions demeure constant pour tous les clients considérés. En effet, il suffit de tester si $\hat{\beta}_0$ et $\hat{\beta}_2$ sont statistiquement et conjointement égaux à zéro¹¹. Le test de Fisher rejette cette hypothèse à un degré de confiance de 95% et indique un ratio obligations/actions décroissant en fonction de la tolérance au risque pour les individus considérés.

Comme le note Elton et Gruber (2000), ce rejet de l'hypothèse d'un ratio obligations/actions constant pour tous les individus ne devrait pas être interprété comme

¹¹ Un test d'Hausman a été mené au préalable afin de s'assurer que la régression ne présentait aucun problème d'endogénéité.

une confirmation du paradoxe d'allocation d'actifs soulevé par Canner et al. (1997). En effet, il serait judicieux de tester si les investisseurs considérés ont fait leur choix de portefeuille dans un contexte vérifiant le théorème de séparation en deux fonds.

3- Test du théorème de séparation :

Une hypothèse de base utilisée tout au long de notre travail consiste à considérer la moyenne et la variance comme critères du choix du portefeuille des individus. Une telle hypothèse ne serait pas contestée en présence d'individus ayant une fonction d'utilité quadratique ou en disposant de rendements ayant des distributions elliptiques¹². Or, une utilité quadratique sous-entend un degré d'aversion au risque croissant avec la richesse initiale d'un individu. Ainsi, il serait judicieux de focaliser l'intérêt sur la deuxième explication possible qui sous-tend notre hypothèse de base; tout en considérant une fonction d'utilité croissante et concave. S'assurer que les rendements des actions, des obligations et de la monnaie font partie de la famille des distributions elliptiques nous permettra de consolider nos conclusions futures. Par conséquent, il serait judicieux de présenter dans un premier temps les données qu'auraient pu utiliser les individus sujets de notre étude lors de leur choix de portefeuille.

3.1- Rendements des actifs financiers :

Afin d'approximer les rendements qu'aurait pu considérer les individus de notre base de données pour le choix de leurs portefeuilles, on a eu recours aux performances réalisées par certains fonds mutuels canadiens. En effet, les rendements réalisés par les fonds mutuels représentent un bon indicateur des différents marchés financiers. Barras, Scaillet et Wermers (2005) ont démontré que la sur-performance réalisée par certains fonds mutuels est due principalement au hasard. Ils ont prouvé, également, la faible proportion de fonds mutuels réalisant des sous-performances¹³.

¹² Voir Owen et Rabinovitch (1983).

¹³ Ils recensent, uniquement, 20% de l'ensemble des fonds mutuels d'actions qui affichent une sous-performance, en se basant sur des données provenant des États Unis.

Ainsi, on va s'intéresser aux rendements réalisés par les fonds *Férique Actions*, *Férique Obligations* et *Férique Revenu à court terme* afin d'approximer les rendements considérés par nos 470 individus. Les informations disponibles au prospectus de chacun de ces fonds expliquent mieux notre choix. En effet, le fonds *Férique Actions* se fixe comme objectif l'obtention d'une appréciation à long terme du capital en investissant dans des actions de sociétés canadiennes. Le fonds *Férique Obligations*, quant à lui, vise à obtenir un revenu courant élevé et, à l'occasion, une appréciation du capital en investissant dans des obligations canadiennes. Son portefeuille est composé d'obligations canadiennes émises par le gouvernement canadien, les provinces, les municipalités et les sociétés. Finalement, le fonds *Férique Revenu à court terme* se propose d'obtenir un revenu courant tout en protégeant le capital et maintenant une liquidité élevée. Son portefeuille est composé à 80% par de dettes émises au Canada dont l'échéance est inférieure à 6 mois.

Les rendements des trois fonds cités ci-haut ont été observés mensuellement entre janvier 1995 et juin 2000¹⁴. Trois remarques sont à signaler pour expliquer un tel choix. Pour débiter, rappelons nous que la composition du portefeuille de chaque individu était celle du mois de juillet 2000. Il est raisonnable, ainsi, de considérer des rendements précédant cette date. Une deuxième question en rapport avec ces données concerne leur fréquence d'observation. Signalons à ce niveau que la considération de rendements mensuels est conforme à plusieurs travaux¹⁵ traitant du problème de choix du portefeuille. Finalement, considérer une période d'observation avoisinant les cinq années semble être un choix judicieux. En effet, une période plus courte mène à des résultats peu précis alors qu'une très longue période conduit à des estimations qui peuvent être affectées par des changements de régime.

Notons, également, la forte corrélation qui existe entre les rendements des trois fonds considérés et ceux obtenus par certains indices usuels durant la période allant de janvier

¹⁴ Ces rendements sont disponibles sur le site des fonds Férique (www.ferique.com)

¹⁵ Selon Elton et Gruber (2000) "in finance, it is common to use monthly intervals to measure returns used in estimating expected returns, variances and covariances".

1995 à juin 2000. En effet, on observe un coefficient de corrélation de 91.97% entre le rendement du fonds *Férique Actions* et le rendement de l'indice TSE300. S'intéressant aux obligations, on obtient un coefficient de corrélation de 87.24% entre le rendement du fonds *Férique Obligations* et celui réalisé par l'indice Scotia Capital (Overall Universe)¹⁶. Finalement, la corrélation entre le rendement du fonds *Férique Revenu à court terme* et le rendement moyen sur les bons du trésor à 1 mois¹⁷ s'élève à 80.39%.

Une fois ces rendements historiques définis, on est en mesure de déterminer s'ils peuvent être considérés comme des distributions elliptiques.

3.2- Test d'ellipticité des rendements des actifs financiers :

Deux familles de tests sont généralement utilisées afin de déterminer la nature des distributions multivariées : il s'agit des tests du type Jarque-Bera et des tests du type Mardia. Parmi les tests du type Jarque-Bera, on cite celui introduit par Kilian et Demiroglu (2000) et qui se base sur un calcul du degré d'asymétrie et d'aplatissement de chaque variable aléatoire à part dans un premier temps. Une agrégation des ces résultats univariés permet l'obtention de statistiques relatives à la distribution multivariée. Les tests du type Mardia (1970) permettent de calculer directement le degré d'asymétrie multivarié ainsi que le degré d'aplatissement multivarié. Ces tests ont, ainsi, le mérite de prendre en considération la corrélation qui existe entre les différentes variables aléatoires formant la distribution jointe. Finalement, ces tests aboutissent aux mêmes résultats que ceux obtenus via le test de Jarque-Bera si on se place dans le cas univarié. Ainsi, ces tests semblent les mieux appropriés au cas multivarié. Dès lors, il serait judicieux de les appliquer dans notre contexte actuel.

¹⁶ Les rendements relatifs à l'indice TSE 300 et de l'indice Scotia Capital sont collectés de la base Datastream.

¹⁷ Cette donnée est obtenue à partir du site de la Banque du Canada; l'identificateur étant le V122529 au répertoire CANSIM.

Un test du type Mardia se base sur deux statistiques à savoir le degré d'asymétrie multivarié (*MSK*) et le degré d'aplatissement multivarié (*MKU*). On présente, dans un premier temps, ces deux statistiques. On exposera, ensuite, la méthodologie à adopter afin de déterminer la nature de la distribution jointe entre les rendements des actions et des obligations et de la monnaie.

Étant donné N actifs risqués observés sur T périodes; on aura, ainsi, T vecteurs $R_1, R_2, \dots, R_T$; chaque vecteur contient les rendements observés à une date donnée pour les N actifs risqués considérés.

Soit $d_{ts} = (R_t - \bar{R})' S^{-1} (R_s - \bar{R})$ pour tout t et s compris entre 1 et T ; $\bar{R}$ et S étant, respectivement, le vecteur des rendements moyens et la matrice de variance-covariance. Ainsi, le degré d'asymétrie et le degré d'aplatissement sont calculés comme suit :

$$MSK = \frac{1}{T^2} \sum_{t=1}^T \sum_{s=1}^T d_{ts} \quad \text{et} \quad MKU = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T d_{tt}^2 \quad (3)$$

Ces deux statistiques serviront de base pour déterminer la distribution des rendements observés des actions et des obligations. La première étape consiste à calculer les statistiques *MSK* et *MKU* (qu'on notera respectivement par MSK_{obs} et MKU_{obs}) relatives à la série de rendements observés. La deuxième étape se base sur des simulations; on procède à T tirages de N variables aléatoires selon une distribution bien déterminée (student multivariée, normale multivariée ...) et tenant compte d'une matrice de variance-covariance équivalente à celle relative aux observations. À partir de ces données simulées, il est possible de calculer les statistiques *MSK* et *MKU*. Les résultats obtenus seront notés par $MSK_{sim,1}$ et $MKU_{sim,1}$. Refaire M fois ces simulations nous permet d'obtenir les deux vecteurs suivants : $MSK_{sim} = [MSK_{sim,1}, MSK_{sim,2}, \dots, MSK_{sim,M}]'$ et $MKU_{sim} = [MKU_{sim,1}, MKU_{sim,2}, \dots, MKU_{sim,M}]'$. On procèdera, ensuite, au classement des éléments de ces deux vecteurs pour retrouver les vecteurs MSK_{sim}^{ord} et MKU_{sim}^{ord} . Finalement,

le fait de remarquer que MSK_{obs} est comprise entre la $\left[\frac{\alpha}{2}M + 1\right]^{eme}$ valeur et la $\left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)M - 1\right]^{eme}$ valeur du vecteur MSK_{sim}^{ord} et que MKU_{obs} est comprise entre la $\left[\frac{\alpha}{2}M + 1\right]^{eme}$ valeur et la $\left[\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)M - 1\right]^{eme}$ valeur du vecteur MKU_{sim}^{ord} nous permet de conclure que les rendements observés suivent la distribution multivariée de laquelle on a fait des simulations avec un seuil de confiance de $(1-\alpha)$.

Appliquons la méthodologie décrite ci haut pour notre contexte actuel : s'intéresser aux rendements mensuels observés entre janvier 1995 et juin 2000 pour le fonds *Férique Actions*, *Férique Obligations* et *Férique Revenu à court terme*. Les statistiques relatives aux rendements observés s'élèvent à 2.2493 et 15.7729, respectivement pour le degré d'asymétrie et le degré d'aplatissement. Ces valeurs permettent de conclure, à un seuil de confiance de 95%, que les rendements observés pourraient suivre une distribution student multivariée avec 10 degrés de liberté¹⁸. En effet, l'intervalle de confiance relatif au degré d'asymétrie était égal à [0.3915 ; 4.9090] alors que celui relatif au degré d'aplatissement correspondait à [13.4822; 23.9927].

Finalement, et comme le souligne Dufour, Khalaf et Beaulieu (2003), ce genre de test ne permet pas d'affirmer que les rendements observés correspondent à une unique distribution multivariée. Plutôt, il nous permet de conclure si une distribution candidate pourrait correspondre aux rendements observés à un seuil de confiance fixé. Ainsi, pour les mêmes données, on pourrait se retrouver avec plusieurs distributions multivariées vérifiant le test décrit ci haut.

Toutefois, le fait d'aboutir au résultat que les rendements des actions, des obligations et de la monnaie pourraient correspondre à l'une des distributions elliptiques (la distribution student à 10 degrés de liberté) nous assure de la pertinence du critère moyenne-variance et de l'éventuelle séparation des portefeuilles.

¹⁸ Ces résultats sont obtenus en se basant sur 10 000 simulations.

3.3- Test du Black-CAPM avec des rendements non normaux :

Beaulieu, Dufour et Khalaf (2003) ont présenté un test de la version Black du CAPM en présence de rendements non gaussiens. Il serait judicieux, ainsi, d'adopter leur méthodologie puisqu'on est en présence de trois actifs risqués uniquement dont les rendements semblent correspondre à une distribution student. Présentons alors la méthodologie utilisée pour tester le Black-CAPM et essayons de l'appliquer ensuite à notre contexte particulier. Une brève introduction s'avère indispensable, toutefois, afin d'exposer les notations à utiliser.

Notons par R_{it} , $i = 1, \dots, n$ les rendements de n actifs risqués durant la période t (t allant de 1 à T) et par $\tilde{R}_{Mt}$ le rendement du portefeuille de marché. Ainsi, le test du BCAPM se basera sur le modèle suivant :

$$R_{it} = a_i + b_i \tilde{R}_{Mt} + u_{it} \quad ; \quad t = 1, \dots, T, i = 1, \dots, n \quad (4)$$

où u_{it} désigne le terme d'erreur.

En effet, tester le BCAPM revient à tester s'il existe un scalaire γ (le rendement du portefeuille à zéro bêta dont on ignore la composition) tel que :

$$H_{BCAPM} : a_i = \gamma(1 - b_i) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (5)$$

Le modèle (4) peut être réécrit sous forme matricielle

$$Y = XB + U \quad (6)$$

Avec : $Y = [R_1, \dots, R_n]$, $X = [\iota_T, \tilde{R}_M]$

$$R_i = (R_{i1}, \dots, R_{iT})' \text{ et } \tilde{R}_M = (\tilde{R}_{1M}, \dots, \tilde{R}_{TM})'$$

Et finalement, le test d'hypothèse présenté en (5) se base sur le calcul du ratio de quasi-vraisemblance, défini comme suit :

$$LR_{BCAPM} = T \ln(\Lambda_{BCAPM}) \text{ avec } \Lambda_{BCAPM} = \left| \hat{\Sigma}_{BCAPM} \right| / \left| \hat{\Sigma} \right|, \quad (7)$$

où : $\hat{\Sigma} = \hat{U}'\hat{U} / T$; $\hat{U} = Y - X\hat{B}$ et $\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$

$\hat{\Sigma}_{BCAPM}$, quant à lui, désigne l'estimateur de $\hat{\Sigma}$ en considérant le modèle contraint qui vérifie l'hypothèse (5).

Une hypothèse de base de la méthodologie de Beaulieu et al. (2003) est la possibilité de réécrire le vecteur $U_t = (u_{1t}, \dots, u_{nt})'$ comme le produit d'une matrice triangulaire inconnue J et un vecteur $W_t = (w_{1t}, \dots, w_{nt})'$ dont la distribution jointe est complètement spécifiée. Ainsi, on obtient les deux égalités suivantes :

$$U_t = JW_t \quad (8)$$

$$\Sigma = JJ' \quad (9)$$

Σ désigne la matrice variance-covariance du vecteur U_t .

Étant donné cette hypothèse considérée par Beaulieu et al. (2003), le ratio de vraisemblance, défini par l'expression (7) et permettant de tester si le scalaire γ_0 vérifie l'hypothèse (5), sera distribué comme suit :

$$LR(\gamma_0) = T \ln(|W'M_0W| / |W'MW|) \quad (10)$$

où : $M = I - X(X'X)^{-1}X'$ et $M_0 = M + X(X'X)^{-1}H'[H(X'X)^{-1}H']^{-1}H(X'X)^{-1}X'$
avec $H = [1 \ \gamma_0]$ et $W = [W_1, \dots, W_T]'$

Ainsi, le test du BCAPM revient à fixer, dans une première étape, une valeur pour le scalaire γ_0 et à calculer le ratio de vraisemblance qui en découle. La deuxième étape consiste à simuler N tirages de la distribution multivariée W . Pour chacun de ces tirages, on

calcule le ratio de vraisemblance tel que défini par l'expression (10). Le calcul de la *p-value* spécifique au scalaire γ_0 s'obtient comme suit :

$$\hat{p}_N(LR(\gamma_0)|\nu) = \frac{\hat{G}_N(\gamma_0, \nu) + 1}{N + 1}, \quad (11)$$

où ν désigne les paramètres de la distribution utilisée lors des simulations (tels que le degré de liberté lors de la simulation d'une distribution Student) et $\hat{G}_N(\gamma_0, \nu)$ correspond au nombre de ratios issus des simulations et supérieurs au ratio calculé à partir des observations.

Ce calcul des *p-values* est répété pour plusieurs valeurs possibles de γ_0 et la *p-value* du test de BCAPM est obtenue comme suit :

$$\hat{p}_N^*(LR_{BCAPM}|\nu) = \sup_{\gamma_0} \hat{p}_N(LR(\gamma_0)|\nu) \quad (12)$$

En définitif, la règle de décision concernant le test d'hypothèse cité en (5) consiste à comparer la *p-value* reportée en (12) et le seuil de significativité α considéré : si la *p-value* est supérieure à α , on ne rejette pas l'hypothèse du BCAPM.

Essayons à présent d'appliquer ce test de BCAPM à notre contexte particulier. En considérant le fonds *Férique Équilibré* comme portefeuille de marché¹⁹ et en se basant sur les résultats relatifs à la distribution des rendements des fonds *Férique Actions*, *Férique Obligations* et *Férique Revenu à court terme* (la distribution student à 10 degrés de liberté), on aboutit à la conclusion que le BCAPM n'est pas rejeté pour un seuil de confiance de 95% et en considérant 9 999 simulations de la distribution Student multivariée à 10 degrés de liberté.

Afin de consolider ce constat, il serait judicieux de mener certains tests de robustesse. En effet, nos résultats présentés ci-haut pourraient dépendre des approximations du rendement

¹⁹ On considère les rendements mensuels entre janvier 1995 et juin 2000. Le portefeuille de ce fonds est composé d'actions, obligations ainsi que d'actifs à court terme.

des actions, des obligations, des liquidités et du marché. Également, ces résultats pourraient être tributaires de la méthodologie utilisée pour tester le Black-CAPM.

3.4- Robustesse des résultats:

Notre premier test de robustesse concerne la mesure de tolérance au risque. En effet, les résultats découlant de la mesure indirecte de tolérance au risque définie en (1) pourraient dépendre des coefficients attribués. Également, il y en a possibilité de mauvaise interprétation de ces coefficients : il est erroné de supposer qu'un investisseur qui place son argent dans des actifs spéculatifs est 3 fois plus tolérant au risque qu'un investisseur plaçant son argent dans des actifs à revenu.

Ainsi, nous proposons une troisième mesure de tolérance au risque qui se définit comme suit :

$$T3 = \frac{Rmon * mon\% + Robl * obl\% + Ract * act\%}{Ract} \quad (13)$$

Où *mon%*, *obl%* et *act%* représentent, respectivement, les proportions détenues par chaque investisseur en monnaie, obligations et actions. *Rmon*, *Robl* et *Ract* désignent les rendements moyens de la monnaie, des obligations et des actions considérés par tous les investisseurs²⁰.

En effet, un investisseur plus tolérant au risque aura tendance à placer sa richesse dans des actifs financiers à risque élevé, synonyme de rendement plus élevé. Ainsi, le rendement du portefeuille d'un individu devrait indiquer sa tolérance au risque.

La régression de la proportion investie en obligations par rapport à cette nouvelle mesure de tolérance au risque indique les résultats suivants :

²⁰ Dans notre présent cas, ces rendements moyens s'élèvent respectivement à 0.4%, 0.7% et 1.34% si on suppose que les individus considèrent les fonds *Férique* afin de déterminer leurs choix de portefeuille.

Tableau.6 : Résultats de la régression en utilisant la mesure directe de tolérance au risque

$$Y = \beta_6 + \beta_7 T3 + \beta_8 Z + \varepsilon \quad (R3)$$

Variables indépendantes	Coefficient (statistique t)
Constante ²¹	2.1340* (49.028)
T3	-2.2397* (-67.873)
Âge	0.0006 (1.383)
Revenu	0.0000 (0.831)
Actif (0 à 25)	-0.0015 (-0.056)
Actif (25 à 50)	-0.0127 (-0.551)
Actif (50 à 100)	0.0034 (0.197)
Actif (250 à 500)	0.0010 (0.074)
Actif (plus de 500)	0.0068 (0.369)
Montant du portefeuille	-0.0001* (-3.206)
Conseiller financier 1	-0.0130 (-0.970)
Conseillers financier 3&4	-0.0151 (-0.991)
Compte de fonds de pension	-0.0293* (-2.451)
Compte marge	0.0273 (1.676)
Connaissance excellente	-0.0002 (-0.006)
Connaissance passable	0.0033 (0.291)
Connaissance aucune	-0.0230 (-0.844)

$$R^2 = 94\%$$

* Significatif à un degré de confiance de 95%

²¹ Les variables dichotomiques suivantes font partie de la constante : conseiller financier 2, connaissance bonne, compte marge et de fonds de pension ainsi qu'actif (100 à 250).

Le test d'équivalence de la mesure directe de tolérance au risque (la proportion de la richesse placée en actions) et de la mesure composite définie par les rendements moyens des différents actifs financiers ainsi que la composition du portefeuille indique leur similitude au seuil de confiance de 95%.

Notre deuxième test de robustesse consistera à l'utilisation d'autres approximations pour le rendement des actions, des obligations, des liquidités et du marché. Comme alternative, on va se baser sur les rendements réalisés par certains fonds gérés par Talvest fonds d'investissement ou par les fonds mutuels TD entre janvier 1995 et juin 2000²².

En se basant sur les fonds Talvest, on a sélectionné le fonds *Actions Valeurs Canadiennes Talvest* afin d'approximer le rendement des actions. En effet, l'objectif de ce fonds tel qu'indiqué au prospectus est d'obtenir une croissance du capital supérieure à la moyenne à long terme en investissant principalement dans des titres de participation canadiens.

Le rendement des obligations sera approximé par la performance réalisée par le fonds d'*Obligations Talvest*. L'objectif de ce fonds étant l'obtention d'un revenu courant élevé tout en préservant le capital, en investissant principalement dans des obligations, des débentures, des billets et d'autres titres de créance émis par des institutions financières des sociétés et des gouvernements canadiens.

L'approximation du rendement des liquidités, quant à lui, sera obtenue via les rendements du fonds du *Marché Monétaire Talvest*. En effet, ce fond se propose d'obtenir un revenu élevé tout en préservant le capital et la liquidité, en investissant principalement dans des titres de créance à court terme de haute qualité émis ou garantis par le gouvernement du Canada ou une province canadienne, des obligations émises par des banques, des sociétés de fiducie et des sociétés par actions canadiennes.

Un premier test appliqué aux rendements de ces trois fonds ne nous permet pas de rejeter l'hypothèse nulle de rendements distribués elliptiquement au seuil de confiance de 95%. En

²² Les rendements des fonds sélectionnés sont disponibles directement aux deux sites web suivants : www.talvest.com et www.tdcanadatrust.com

effet, le degré d'asymétrie de la distribution jointe de ces rendements s'élève à 1.7369 alors que le degré d'aplatissement est égal à 17.9584. Ces statistiques appartiennent aux intervalles de confiance au seuil de 95% pour certaines distributions elliptiques (la student multivariée avec 15 degrés de liberté par exemple²³) et ce en considérant 10 000 simulations.

Ce non rejet de l'ellipticité des rendements nous permet de recourir au test de la version Black du CAPM en appliquant la méthodologie de Beaulieu et al. (2003). Le portefeuille de marché à considérer lors de ce test correspond au *fonds Canadien de répartition d'actif Talvest* qui se propose comme objectif l'obtention d'une croissance du capital stable à long terme en investissant principalement dans un portefeuille équilibré composé de titres de créance et de titres de participation canadiens, notamment des instruments du marché monétaire.

Le test du BCAPM, à la manière de Beaulieu et al. (2003) et en utilisant les fonds Talvest, ne nous permet pas de rejeter l'hypothèse nulle de la présence du théorème de séparation, au seuil de confiance de 95% et en tenant compte de 9 999 simulations de la distribution Student multivariée.

La même méthodologie citée ci-haut est appliquée avec les fonds TD. Ainsi, on sélectionne le *Fonds du marché monétaire canadien TD*, le *Fonds d'actions canadiennes TD* et le *Fonds d'obligations canadiennes TD* afin d'approximer, respectivement, le rendement des liquidités, des actions et des obligations échangées au Canada.

En se basant sur ces données également, on ne rejette pas l'hypothèse d'ellipticité des rendements au seuil de confiance de 95%. En effet, on obtient un degré d'asymétrie de 2.0406 et un degré d'aplatissement de 17.1734 pour la distribution jointe alors que les

²³ L'intervalle de confiance du degré d'asymétrie est [0.3327 ; 3.3099] alors que celui du degré d'aplatissement est [13.0665 ; 20.8151] au seuil de confiance de 95% et pour la distribution Student à 15 degrés de liberté.

intervalles de confiance obtenus pour une distribution Student multivariée de 8 degrés de liberté sont [0.4466 ; 6.6795] et [13.8692 ; 27.0550] respectivement.

Ce constat nous mène ainsi à tester le BCAPM en considérant comme portefeuille de marché le Fonds équilibré TD. En appliquant la méthodologie citée ci haut et en se basant sur 9 999 simulations, on abouti à la conclusion de non rejet du BCAPM au seuil de confiance de 95%.

Ainsi, on ne pourra pas remettre en cause l'existence du théorème de séparation par une éventuelle mauvaise approximation du rendement des actions, des obligations, des liquidités et du marché.

Également, il serait judicieux d'appliquer une deuxième méthodologie pour tester le BCAPM en présence de rendements non gaussiens. Cette deuxième technique s'inspire du travail de Zhou (1993) et se différencie du travail de Beaulieu et al. (2003) par la non séparation entre les termes de nuisance (la matrice triangulaire inconnue : J) et le vecteur W dont la distribution jointe est complètement spécifiée.

En adoptant cette deuxième méthodologie, la distribution du ratio de vraisemblance sera :

$$LR(\gamma_0) = T \ln \left(\frac{|\hat{U}' M_0 \hat{U}|}{|\hat{U}' M \hat{U}|} \right) \quad (14)$$

$\hat{U}$, M_0 et M tels que définis ci-haut.

Il suffit, ainsi, d'appliquer la même méthodologie proposée par Beaulieu et al. (2003) mais en procédant à des tirages à partir d'une distribution U au lieu de la distribution complètement spécifiée W .

L'application de cette méthodologie pour nos trois familles de fonds (Férique, Talvest et TD) ne nous permet pas de rejeter l'hypothèse nulle d'existence du théorème de séparation et ce au seuil de confiance de 95%. Pour chacun des trois tests, on a eu recours à 9 999 simulations à partir de distributions de Student multivariées.

Conclusion :

Tout au long de ce travail, on a cherché à apporter des nouveaux éléments de réponse quant au paradoxe d'allocation d'actifs soulevé par Canner et al. (1997). Ainsi, on a présenté dans un premier temps notre base de données et on s'est assuré de la fiabilité de nos mesures de tolérance au risque. Ensuite, on a tenté de faire le lien entre notre étude et celle de Elton et Gruber (2000). Finalement, on a testé l'hypothèse de présence du théorème de séparation. Ce test a été mené en deux étapes : une première étape consistait à s'assurer de l'ellipticité des rendements observés sur le marché alors que la seconde étape se résumait à un test de la version Black du CAPM en présence de termes d'erreurs non gaussiens. Les résultats obtenus sont en faveur de rendements elliptiques et vérifiant l'hypothèse du Black-CAPM.

Annexe 1

Statistiques relatives aux rendements utilisés lors de notre test de séparation

	Moyenne	Écart type	Skewness	Kurtosis
Férique - Actions	0.0134	0.0395	-0.9924	5.9434
Férique - Obligations	0.0070	0.0133	0.3540	2.7708
Férique - Monnaie	0.0040	0.0011	0.8953	3.9003
Férique - Équilibré	0.0117	0.0282	-0.8186	5.7848
Talvest - Actions	0.0137	0.0483	-0.6383	7.5227
Talvest - Obligations	0.0065	0.0141	0.3682	3.2926
Talvest - Monnaie	0.0036	0.0011	0.7644	3.3844
Talvest - Équilibré	0.0101	0.0302	-0.7545	5.1402
TD - Actions	0.0146	0.0458	-1.0841	7.3410
TD - Obligations	0.0094	0.0158	0.2713	2.7007
TD - Monnaie	0.0036	0.0009	0.6045	2.7264
TD - Équilibré	0.0096	0.0234	-1.3929	7.8637

Annexe 2

Corrélation entre les rendements des fonds considérés

[illegible]

Références :

Barras, L., O. Scaillet & R. Wermers (2005) «*False Discoveries in Mutual Fund Performance: Measuring Luck in Estimated Alphas*» Cahier de recherche No 163 , FAME.

Beaulieu, M. C., J. M. Dufour & L. Khalaf (2003) «*Testing Black's CAPM with Possibly non Gaussian Errors: an Exact Simulation-Based Approach*» Cahier de recherche, Cirano, CIREQ et Université de Montréal.

Boyle, G. W. & G. A. Gurthie (2005) «*Human Capital and Popular Investment Advice*» Review of Finance, Vol. 9, No. 2, pp. 139-164.

Canner, N., N. G. Mankiw & D. N. Weil (1997) «*An Asset Allocation Puzzle*» American Economic Review, Vol. 87, No. 1, pp. 181-191.

Dufour, J. M., L. Khalaf & M. C. Beaulieu (2003) «*Exact Skewness-Kurtosis Tests for Multivariate Normality and Goodness-of-fit in Multivariate Regressions with Application to Asset Pricing Models*» Oxford Bulletin of Economics and Statistics, Vol. 65, pp. 891- 906.

Elton, J. E. & J. M. Gruber (2000) «*The Rationality of Asset Allocation Recommendations*» Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 35, No. 1, pp. 28-41.

Jarrow, R. (1980) «*Heterogeneous Expectations, Restrictions on Short Sales and Equilibrium Asset Prices*», Journal of Finance, Vol. 35, pp. 1105-1113.

Jones, C. M. & O. A. Lamont (2002) «*Short-sale Constraints and Stock Returns*», Journal of Financial Economics, Vol. 66, pp. 207-239.

Kilian, L. & U. Demiroglu (2000) «*Residual-based Tests for Normality in Autoregressions: Asymptotic Theory and Simulation Evidence*», Journal of Business and Economic Statistics, Vol. 18, pp. 40-50.

Lamont, O. A. (2004) «*Short Sale Constraints and Overpricing*» NBER Reporter, Winter 2004/5, pp16-18.

Markowitz, H. (1952) «*Portfolio Selection*» The Journal of Finance, Vol. 7, pp. 77-91.

Mardia, K. V. (1970) «*Measures of Multivariate Skewness and Kurtosis with Applications*» Biometrika, Vol. 57, pp. 519–530.

Owen, J. & R. Rabinovitch (1983) «*On the Class of Elliptical Distributions and their Applications to the Theory of Portfolio Choice*» The Journal of Finance, Vol. 38, No. 3, pp. 745-752.

Roll, R. (1977) «*A Critique of the Asset Pricing Theory's Tests; Part I: On Past and Potential Testability of the Theory*» Journal of Financial Economics, Vol. 4, No. 2, pp. 129-176.

Zhou, G. (1993) «*Asset-Pricing Tests under Alternative Distributions*» The Journal of Finance, Vol. 48, No. 5, pp. 1927-1942.