Evaluation des performances relatives, risque et entrée

Jean-Daniel Guigou[1], Bruno Lovat[2]

Papier présenté au 46e congrès de la SCSE

3 et 4 mai 2006

Version provisoire

"...reasons of strategic delegation may influence the design of managerial incentive schemes, perhaps helping to explain why they are sometimes based on relative, rather than absolute, performance. » Vickers (1985, p.139)

Comment aligner les intérêts des dirigeants sur ceux des actionnaires ? La solution classique à ce problème de gouvernance d'entreprise consiste à lier la rémunération des dirigeants sur les performances de l'entreprise. Autrement dit, il faut inciter le dirigeant à maximiser le profit de la firme.

Or cette incitation n'est pas toujours appropriée. Autrement dit, maximiser le profit ne conduit pas toujours au profit maximum ! En particulier, il peut être intéressant, du point de vue de l'actionnaire, de proposer un contrat au terme duquel la rémunération du dirigeant est une fonction de la différence entre les profits de la firme qu'il dirige et ceux obtenus en moyenne par les autres firmes dans l'industrie. Il s'agit là de l'avantage stratégique associé à l'évaluation des performances relatives (EPR). Cet argument, avancé pour la première fois par Vickers (1985), vient s'ajouter à l'argument fondé sur le principe de réduction de l'exposition au risque des dirigeants (Holmström, 1982). Ce sont ces deux arguments que nous combinons ici. Le cadre retenu est simple. Il s'agit d'un duopole de Cournot avec des dirigeants également averses au risque. Le problème est décrit comme un jeu à deux étapes. A la première étape, chaque firme, représentative de ses actionnaires, élabore un contrat incitatif pour son dirigeant. Les termes des contrats sont annoncés publiquement. A la seconde étape, les managers déterminent les quantités et les niveaux d'effort. Le concept de solution que nous retenons est celui de l'équilibre parfait sous-jeux.

Nous caractérisons ces équilibres et appliquons les résultats obtenus à l'étude d'un marché sur lequel une firme A est en situation de monopole et une firme B essaie de s'installer. Nous établissons en particulier l'existence d'un seuil d'aversion au risque des dirigeants pour lequel le coût à partir duquel la firme B est dissuadée d'entrer est plus élevé dans le modèle avec EPR que dans le modèle sans EPR.

[1]Université du Luxembourg, BETA UMR CNRS
[2]Université de Nancy 2, BETA UMR CNRS

Nous comptons ainsi contribuer à la littérature théorique sur le sujet, en présentant des résultats qui sont, pour certains, déjà connus (voir Fumas, 1992, et Aggarwal et Samwick, 1999), pour d'autres, véritablement originaux.

I. Le modèle de base

Considérons deux entreprises de Cournot caractérisées par la séparation entre propriété et direction.

Les deux entreprises produisent un bien homogène, dont la courbe de demande est donnée par $P = 1 - Q$, où P désigne le prix et Q l'output total. Les coûts marginaux sont constants et normalisés à zéro. Il n'y a pas de coûts fixes.

Les dirigeants décident des quantités à produire et fournissent un effort coûteux. Soit q_i l'output de la firme i et e_i l'effort de son dirigeant, les profits bruts s'écrivent:

$$\pi_i = (1 - q_i - q_j)q_i + e_i + \varepsilon \qquad i \neq j \qquad i,j = 1,2 \tag{1}$$

où ε est une variable aléatoire qui suit une loi normale de moyenne nulle et de variance σ^2.

Les propriétaires ne peuvent pas rédiger de contrats exécutoires qui spécifient les niveaux de production et d'effort des dirigeants.

Dans ce modèle, comme dans Fumas (1992), la rémunération incitative est linéaire et basée sur les performances relatives:

$$y_i = \alpha_i + \beta_i(\pi_i + \mu_i \pi_j) \qquad i \neq j \qquad i,j = 1,2 \tag{2}$$

où μ_i est le poids à donner aux profits de la firme j dans la fonction objectif du dirigeant i. Nous n'imposons aucune contrainte de signe sur μ_i. En revanche nous supposons que l'inégalité $|\mu_i| < 1$ est toujours satisfaite, ce qui s'avère vérifié à l'équilibre. Notons enfin que l'absence d'évaluation des performances relatives revient ici à fixer $\mu_i = 0$.

Les dirigeants (agents) éprouvent de l'aversion vis-à-vis du risque. Nous représentons les préférences des dirigeants par la fonction d'utilité exponentielle négative $u(y_i, e_i) = -\exp^{-r[y_i - e_i^2/2]}$, où r désigne l'aversion absolue pour le risque qui est constante dans ce cas, y_i la rémunération de l'agent et $e_i^2/2$ son coût de l'effort.

Les propriétaires (principaux), neutres à l'égard du risque, cherchent à maximiser l'espérance des profits nets de la rémunération des dirigeants. Le programme de maximisation du principal i s'écrit:

$$\max_{q_i, e_i, \alpha_i, \beta_i, \mu_i} E(\pi_i - y_i) \tag{3}$$

$$\text{tel que } (q_i, e_i) \in \arg \max_{q_i, e_i} E\left[-\exp^{-r\left[y_i - e_i^2/2\right]}\right] \tag{4}$$

$$\text{et } E\left[-\exp^{-r\left[y_i - e_i^2/2\right]}\right] \geq -\exp^{-r\overline{y}} \tag{5}$$

où $-\exp^{-r\overline{y}}$ est l'utilité de réservation de l'agent et $\overline{y}$ le salaire certain en vigueur sur le marché du travail. La condition (4) impose la contrainte selon laquelle il est optimal pour l'agent de choisir le comportement que le principal souhaite lui voir choisir. La condition (5) impose la contrainte selon laquelle l'utilité de l'agent doit être au moins égale à son utilité de réservation.

Le jeu se déroule de la manière suivante. A la première étape, les propriétaires choisissent simultanément et annoncent publiquement les termes des contrats passés avec leurs dirigeants. Puis, à la seconde étape, les dirigeants déterminent simultanément les quantités à produire et les efforts à exercer. Les profits sont alors réalisés et les paiments effectués selon les engagements pris. Nous résolvons ce jeu par rétroduction afin de déterminer les équilibres parfaits en sous-jeux.

Commençons par le problème de l'agent i à la seconde période.

Le paiement incitatif y_i étant distribué selon une loi normale, maximiser la fonction d'utilité espérée exponentielle négative de coefficient r, revient à maximiser la fonction de Markowitz linéaire de coefficient $r/2$, notée

$$C_i = E(y_i) - \frac{1}{2}e_i^2 - \frac{r}{2}Var(y_i) \tag{6}$$

avec

$$E(y_i) = \alpha_i + \beta_i[(1 - q_i - q_j)q_i + e_i + \mu_i((1 - q_j - q_i)q_j + e_j)] \tag{7}$$

et

$$Var(y_i) = \beta_i^2(1 + \mu_i)^2\sigma^2. \tag{8}$$

Par conséquent, le problème de maximisation de l'agent i peut s'écrire :

$$\max_{q_i,e_i}\{\alpha_i+\beta_i[(1-q_i-q_j)q_i+e_i+\mu_i((1-q_j-q_i)\,q_j+e_j)] \qquad (9)$$
$$-\frac{1}{2}e_i^2-\frac{r}{2}\beta_i^2(1+\mu_i)^2\sigma^2\}$$

Les conditions du premier ordre de ce problème de maximisation concave s'écrivent:

$$\beta_i\,(1-q_j-q_j\mu_i-2q_i)=0 \Longrightarrow q_i=\frac{1-(\mu_i+1)q_j}{2} \qquad (10)$$

et

$$\beta_i-e_i=0 \qquad (11)$$

En résolvant pour q_i et e_i, respectivement, on trouve les choix optimaux des agents en termes de quantité et d'effort pour des contrats donnés:

$$q_i^*=\frac{-1+\mu_i}{-4+(1+\mu_i)\left(1+\mu_j\right)} \qquad (12)$$

$$e_i^*=\beta_i \qquad (13)$$

Comme dans les fonctions objectifs des dirigeants, les variables stratégiques sont séparées des autres variables de décision et du paramètre aléatoire, ce sont les mêmes quantités qu'en présence d'agents neutres au risque sans choix de l'effort. Pour des raisons analogues, les niveaux d'effort sont les mêmes que ceux obtenus en résolvant les problèmes d'incitation en situation d'indépendance stratégique.

Venons-en au problème du principal i à la première période.

Les termes du contrat sont choisis de manière à ce que l'agent obtienne tout juste son utilité de réservation. Autrement dit, l'égalité $E(y_i^*)-\frac{1}{2}e_i^{*2}-\frac{r}{2}Var(y_i^*)=\overline{y}$ est satisfaite, de sorte que le problème du principal peut être réécrit sous la forme:

$$\max_{\beta_i,\mu_i}\{(1-q_i^*-q_j^*)q_i^*+e_i^*-[\overline{y}+\frac{1}{2}e_i^{*2}+\frac{r}{2}\beta_i^2(1+\mu_i)^2\sigma^2]\} \qquad (14)$$

ce qui, après substitution et simplification, donne:

$$\max_{\beta_i,\mu_i}\left[\frac{(\mu_i-1)(\mu\mu_j-1)}{[(\mu_i(\mu_j+1)+\mu_j-3]^2}+\beta_i-\frac{\beta_i^2}{2}-\frac{r}{2}\beta_i^2(\mu_i+1)^2\sigma^2\right] \tag{15}$$

Nous résolvons ce problème en deux temps. Nous commençons par déterminer la valeur optimale de β_i puis celle de μ_i.

1/ La valeur optimale de β_i est obtenue en résolvant les conditions du premier ordre, ce qui donne:

$$\beta_i^*=\frac{1}{1+r\sigma^2\left(1+\mu_i\right)^2} \tag{16}$$

2/ On substitut la valeur de β_i^* dans la fonction objectif du principal pour obtenir le profit net de la firme i en fonction uniquement de μ_i et de μ_j:

$$B_i=\left(-1+\mu_i\mu_j\right)\frac{-1+\mu_i}{\left(-3+\mu_i+\mu_j+\mu_i\mu_j\right)^2}-\overline{y}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+r\sigma^2\left(1+\mu_i\right)^2} \tag{17}$$

La condition du premier ordre s'écrit:

$$\frac{\mu_j-1}{\left(\mu_i+\mu_j+\mu_i\mu_j-3\right)^3}\left(3\mu_i\mu_j-\mu_i-\mu_j-1\right)-r\sigma^2\frac{\mu_i+1}{\left(r\sigma^2\left(\mu_i+1\right)^2+1\right)^2}=0 \tag{18}$$

A l'équilibre symétrique, on a :

$$\frac{3\mu+1}{\left(\mu+3\right)^3\left(\mu-1\right)}-R\frac{\mu+1}{\left(R\left(1+\mu\right)^2+1\right)^2}=0 \text{ avec } R=r\sigma^2 \tag{19}$$

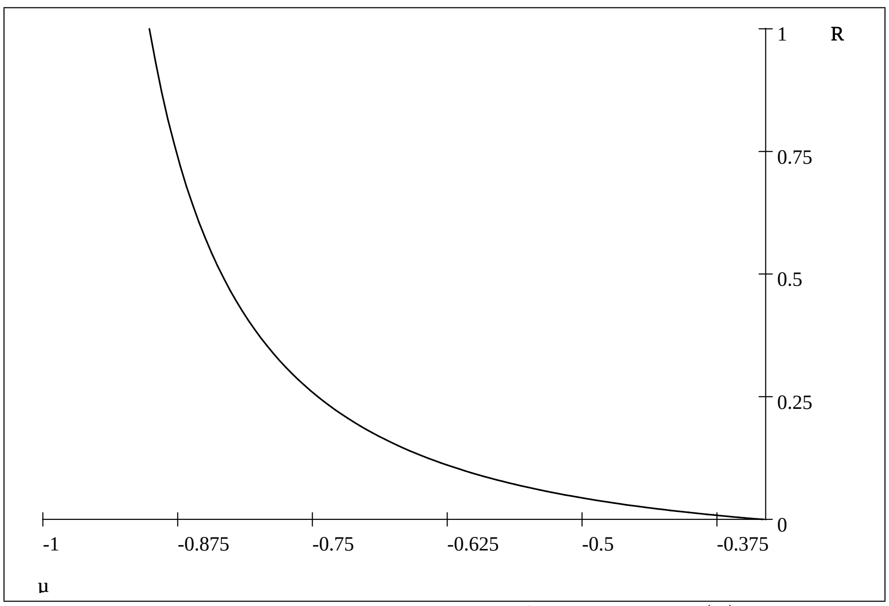
Il est techniquement impossible d'exprimer μ en fonction de R. En revanche, on peut exprimer R comme une fonction de μ

$$R = F(\mu) = \frac{\mu^4 + 8\mu^3 + 12\mu^2 - 8\mu - 29 + \sqrt{(\mu-1)\left(\mu^4 + 8\mu^3 + 6\mu^2 - 16\mu - 31\right)(\mu+3)^3}}{2\,(3\mu+1)\,(\mu+1)^3} \tag{20}$$

ou, après multiplication par la quantité conjuguée :

$$R = F(\mu) = \frac{2}{1+\mu} \frac{3\mu+1}{\left(\mu^4 + 8\mu^3 + 12\mu^2 - 8\mu - 29 - \sqrt{\left((\mu-1)\left(\mu^4 + 8\mu^3 + 6\mu^2 - 16\mu - 31\right)(\mu+3)^3\right)}\right)} \tag{21}$$

$R = F(\mu)$ est une fonction monotone décroissante de μ variant de $[\frac{-1}{3}, -1[$ dans $[0, +\infty[$



Représentation graphique de la fonction $R = F(\mu)$

Il existe ainsi une correspondance bijective entre l'aversion au risque du dirigeant et le contrat optimum qui lui est proposé. Si $R = 0$ la prise en compte des performances de la firme concurrente se fait à hauteur de $\mu = -\frac{1}{3}$ mais plus

R grandit, plus le coefficient μ se rapproche de -1, autrement dit, plus le contrat tend à rémunérer le dirigeant selon la différence de profits entre les deux firmes.

Ce comportement univoque et décroissant liant R et μ permet d'assurer au jeu l'existence et l'unicité d'un équilibre de Nash symétrique. En particulier, à $R \geq 0$ donné, il n'existe qu'un seul candidat : $\mu = F^{-1}(R) \in]-1, -\frac{1}{3}]$ vérifiant les conditions du premier ordre.

Notons alors $B(\mu_1)$ le profit net de la firme 1 quand l'autre joue μ :

$$B(\mu_1) = (-1 + \mu\mu_1) \frac{-1 + \mu_1}{(-3 + \mu_1 + \mu + \mu\mu_1)^2} - \overline{y} + \frac{1}{2} \frac{1}{1 + R_0 (1 + \mu_1)^2}$$

Pour établir que μ est un équilibre de Nash symétrique sur $]-1, 1[$ c'est à dire :

$$\forall \mu_1 \in]-1, 1[, \; B(\mu_1) \leq B(\mu),$$

Il faut étudier la fonction B.

On commence par montrer que sa représentation graphique n'est pas concave sur $]-1, 1[$ en entier mais seulement sur une partie de ce domaine.

Proposition 1. Soit μ_c défini par la relation : $3R(1 + \mu_c)^2 = 1$. Le profit net des actionnaires $B(\mu_1)$ est strictement concave pour tout μ_1 dans $]-1, \mu_c]$ et en particulier pour $\mu_1 = \mu$.

Preuve. Voir Annexe

Cette propriété, pourtant restrictive, de B suffit à montrer que μ est un équilibre de Nash symétrique. La preuve de l'inégalité $B(\mu_1) \leq B(\mu)$, vraie pour tout $\mu_1 \in]-1, 1[$ qui en est le coeur montre clairement que si une firme fait le choix de l'EPR et de son équilibre symétrique, tout autre choix de la firme concurrente est moins profitable, en particulier le choix $\mu = 0$ correspondant à une évaluation des performances absolues (EPA). La proposition suivante précise les propriétés de μ.

Proposition 2. Il existe un unique équilibre de Nash symétrique μ et il est négatif. Quand les dirigeants sont neutres au risque : $\mu = \mu^* = -\frac{1}{3}$. Quand les dirigeants sont strictement averses au risque : $\mu = \mu^{**}$est fonction décroissante de R vérifiant $\mu^{**} < -\frac{1}{3}$ et $\lim_{R \to +\infty} \mu^{**} = -1$.

Preuve. Voir Annexe

Les contrats optimaux prévoient de placer un poids négatif sur les profits des firmes rivales dans la fonction objectif des dirigeants. Ce poids vaut $-1/3$

lorsque les dirigeants sont neutres au risque et diminue dans les négatifs jusqu'à tendre vers -1 lorsque l'aversion à l'égard du risque est très élevée (infinie).

Lorsque les dirigeants sont neutres à l'égard du risque, l'équilibre symétrique est obtenu pour $\mu = -\frac{1}{3}$. Il y a déviation de l'objectif de stricte maximisation du profit. Les quantités étant des substituts stratégiques au sens de Bulow et al. (1985), les firmes sont incitées à s'engager à être aggressive pour induire une réaction plus douce de la part des rivales. C'est précisément ce qu'elles peuvent réaliser en manipulant les incitations des dirigeants par le choix des μ. L'engagement à une politique de vente agressive est obtenue en fixant $\mu < 0$.

Lorsque les entreprises sont indépendantes, le contrat incitatif optimal prévoit d'évaluer les agents sur la base de leurs performances relatives. Le système d'incitation optimal est de la forme $y_i = \alpha_i + \beta_i(\pi_i - \pi_j)$. En filtrant ε, le choc commun affectant les performances des deux entreprises, le schéma incitatif optimal élimine l'exposition au risque de chaque dirigeant, ce qui permet d'implémenter le niveau d'effort de premier rang en fixant $\beta_i^* = 1$. L'arbitrage traditionnel entre les bénéfices retirés de l'assurance de l'agent (du lissage du salaire de l'agent) et les coûts d'incitation que crée une telle assurance (désincitation à l'effort liée à un salaire plat) n'est pas effectif dans notre modèle. Aucun arbitrage n'est nécessaire par suite d'un trait particulier de notre modèle: les profits sont parfaitement corrélés positivement. Dès lors, la solution $\mu_i = -1$ donne à la fois des salaires sans risque et des incitations efficaces.

Dès lors, on comprend mieux la proposition 2. Lorsque R augmente, les propriétaires sont davantage préoccupés par le problème d'aléa moral et de partage des risques que par le problème lié aux interactions stratégiques sur le marché du produit, ce qui explique pourquoi ils ont davantage recours à l'EPR.

II. EPR et entrée

Considérons un marché où une firme instalée (la firme 1) est en situation de monopole. Une seconde firme (la firme 2) est susceptible de se former afin d'entrer sur ce même marché. Si elle ne le fait pas son profit est nul.

Premier cas : en entrant la seconde firme concurrence la première dans une compétition qui utilise l'évaluation relative des performances . La situation est décrite par un jeu à constitué des deux sous-jeux : "entre" et "n'entre pas".

Dans le sous-jeu "n'entre pas", par hypothèse la seconde firme réalise un profit constant nul.

Dans le sous-jeu "entre", qui est le jeu décrit dans la section précédente, chaque firme donne un unique poids optimum aux profits de la firme concurrente dans la rémunération de ses dirigeants caractérisés par un degré d'aversion vis-à-vis du risque. Le sous jeu possède un unique équilibre de Nash μ conduisant aux profits d'équilibre $(B(\mu), B(\mu) - f]$ où f dénote le coût fixe d'entrée et $B(\mu)$ est une fonction croissante de μ:

$$B(\mu) = \frac{1+\mu}{(3+\mu)^2} - \bar{y} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+F(\mu)\,(1+\mu)^2} \tag{22}$$

L'étude des deux composantes du profit net de la firme à l'équilibre symétrique montre que la composante stratégique du profit net est fonction croissante de μ. Plus précisément, cette composante est nulle pour $\mu = -1$ (R infini) et croît continuellement pour atteindre $1/9$ lorsque $\mu = -1/3$ ($R = 0$). En fait, la composante stratégique des profits diminue lorsque le risque et/ou l'aversion du dirigeant augmente (l'output est plus élevé et le prix plus faible) et cette baisse n'est jamais compensée par la hausse de la composante non stratégique des profits (due à la réduction de la prime de risque consécutive à davantage d'EPR).

Cette propriété de la fonction B permet d'établir que l'aversion au risque des dirigeants fait office de barriére à l'entrée dans le cas d'un jeu utilisant l'évaluation relative des performances.

Proposition 3. Soit $\mu = F^{-1}(R)$ l'équilibre de Nash de la proposition 2 et f le coût fixe d'entrée vérifiant:

$$f = B(\mu_f^E) = B(F^{-1}(R_f^E)) \tag{23}$$

où R_f^E traduit le niveau d'aversion au risque du dirigeant auquel on a proposé un contrat avec μ_f^E.

Si $B(\mu) = f$ alors $R = R_f^E$ et le concurrent potentiel est indifférent entre "entrer" et "ne pas entrer" sur le marché.

Si $B(\mu) > f$ alors $R < R_f^E$ et le concurrent potentiel décide d'entrer sur le marché.

Si $B(\mu) < f$ alors $R > R_f^E$ et le concurrent potentiel décide de ne pas entrer sur le marché.

Preuve. Voir Annexe

Second cas : en entrant, la seconde firme concurrence la première dans une compétition qui n'utilise pas l'évaluation relative des performances.

En l'absence de performances relatives et pour les mêmes dirigeants, le sous-jeu de post-entrée posséde un unique équilibre de Nash conduisant aux profits d'équilibre $(B_0, B_0 - f]$ où B_0 est également une fonction croissante de μ :

$$B_0(\mu) = \frac{1}{9} - \bar{y} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+R} = \frac{1}{9} - \bar{y} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+F(\mu)} \tag{24}$$

De la même façon que dans le cas précédent, la croissance de la fonction B_0 permet de montrer le rôle central de l'aversion vis-à-vis du risque des dirigeants dans la décision d'entrée.

Notons $\mu_f^A = F^{-1}(R_f^A)$ le coefficient optimal dans un contrat EPR proposé à un dirigeant d'aversion au risque correspondant à R_f^A. Nous avons alors:

Proposition 4.

Soit $\mu = F^{-1}(R)$ l'équilibre de Nash de la proposition 2 et f le coût fixe d'entrée vérifiant:

$$f = B_0(\mu_f^A) = B_0(F^{-1}(R_f^A)) \tag{25}$$

Si $B_0(\mu) = f$ alors $R = R_f^A$ et le concurrent potentiel est indifférent entre "entrer" et "ne pas entrer" sur le marché.

Si $B_0(\mu) > f$ alors $R < R_f^A$ et le concurrent potentiel décide d'entrer sur le marché.

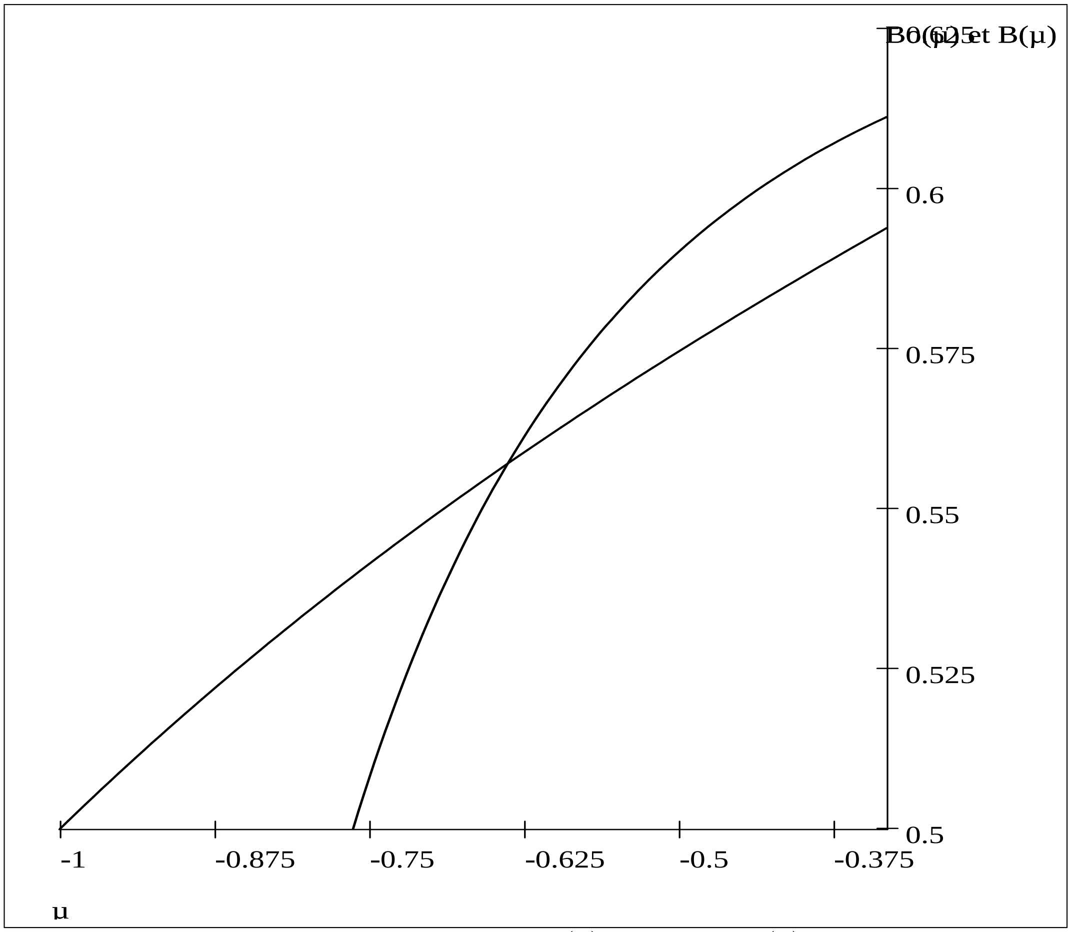
Si $B_0(\mu) < f$ alors $R > R_f^A$ et le concurrent potentiel décide de ne pas entrer sur le marché.

Les propositions 3 et 4 montrent que R est aussi bien en situation d'EPR que d'EPA, le paramètre qui permet de comprendre la décision d'entrer d'une firme. Ce paramètre commun nous améne naturellement à comparer les deux types de contrat.

Nous savons depuis la proposition 2 que les deux contrats ne sont pas simultanement optimaux. Si une firme fait le choix de l'EPR et de son équilibre symétrique, la firme concurrente n'a pas intérêt à proposer à son dirigeant une évaluation des performances absolues. Mais que dire du profit des entreprises quand le jeu se déroule seulement en EPA ? Peut-on le comparer à celui des entreprises quand le jeu se déroule en EPR ?

La proposition suivante montre qu'il existe une valeur R_0 de R, strictement positive pour laquelle le profit des firmes est le même quelle que soit la nature du contrat.

Proposition 5. Notons $B(\mu)$ le profit net des actionnaires dans le modèle avec EPR et B_0 leur profit net dans le modèle sans EPR. Il existe $R_0 > 0$ tel que si $R < R_0$ alors $B(\mu) < B_0$, si $R = R_0$ alors $B(\mu) = B_0$ et si $R > R_0$ alors $B(\mu) > B_0$.



Représentations graphiques de $\mu \to B(\mu)$ et de $\mu \to B_0(\mu)$

Pour $R = R_0$; c'est-à-dire $\mu = \mu_0$, les firmes réalisent le même profit net commun f_0 avec EPR et sans EPR:

$$B(\mu_0) = B_0(\mu_0) = f_0.$$

Proposition duale 6.

Si $R < R_0$, il existe une frange de coûts fixes pour laquelle l'entrée est possible avec EPA mais pas avec EPR.

Si $R > R_0$, il existe une frange de coûts fixes pour laquelle l'entrée est possible avec EPR mais pas avec EPA.

Conclusion

Cet article s'inscrit dans une littérature encore peu développée, à l'intersection de la théorie de l'agence d'un côté et la théorie des jeux et de l'oligopole de l'autre. Nous avons développé un modèle permettant, à la fois, de retrouver les résultats centraux sur l'EPR, en l'occurrence la relation négative entre le niveau d'aversion à l'égard du risque du dirigeant et le niveau d'EPR, ainsi que d'élargir le champ d'analyse sur l'EPR en la reliant à la problématique des barrières à l'entrée. Nous avons établi l'existence d'un seuil d'aversion au risque à partir duquel les entreprises sont mieux loties lorsqu'elles ont recours à l'EPR. Ainsi, tout en promouvant la concurrence entre les firmes déjà installées, l'EPR, réduit l'exposition au risque des dirigeants et permet, dans certaines circonstances, à de nouvelles entreprises d'entrer sur le marché.

Bibiographie

Aggarwal R. et A. Samwick (1999), Executive compensation, strategic competition, and the relative performance evaluation: Theory and evidence, Journal of Finance, LIV (6), 1999-2043.

Fumas V. (1992), Relative performance evaluation of management: The effects of industrial competition and risk sharing, International Journal of Industrial Organization, 10, 473-489.

Holmström B. (1982), Moral hazard in teams, Bell Journal fo Economics, 12, 324-340.

Vickers J. (1985), Delegation and the theory of the firm, (Supplement to the) Economic Journal, 95, 138-147.

Preuve de la proposition 1.

B est la somme de deux fonctions en μ_1

$$
\begin{aligned}
B_1(\mu_1) &= \frac{(-1+\mu\mu_1)(-1+\mu_1)}{(-3+\mu_1+\mu+\mu\mu_1)^2} \\
\text{et} \;\; B_2(\mu_1) &= -\overline{y} + \frac{1}{21+R(1+\mu_1)^2}.
\end{aligned}
$$

1) Montrons que B_1 est toujours strictement concave $\forall \mu_1 \in]-1,1[; \forall \mu \in]-1,-\frac{1}{3}]$.

Après le changement de variables :

$$X_1 = 1+\mu_1 \in]0,2] \quad ; \qquad X_2 = 1+\mu \in]0, \frac{2}{3}]$$

celles-ci, prennent la forme (avec un léger abus de notation) :

$$
\begin{aligned}
B_1(X_1) &= \frac{(X_2X_1 - X_2 - X_1)(-2+X_1)}{(-4+X_2X_1)^2} \\
B_2(X_1) &= -\overline{y} + \frac{1}{2(1+RX_1^2)}
\end{aligned}
$$

sous laquelle il est facile d'établir que :

$$\max_{X_1 \in [0,2]} \left[\frac{d^2(B_1(X_1))}{dX_1^2} \right] < 0$$

En effet :

$G(X_1) = \frac{d^2(B_1(X_1))}{dX_1^2} = -2(-2+X_2) \frac{\left(-4X_2(-3+X_1)+X_2^2(3X_1-6)-8\right)}{(-4+X_2X_1)^4}$ est décroissante en X_1 car

$$G'(X_1) = 6X_2(X_2-2) \frac{\left(3X_2^2 - 4X_2\right)X_1 - 16 - 8X_2^2 + 20X_2}{(-4+X_2X_1)^5}$$

et si $X_2 \in]0, \frac{2}{3}]$ alors $3X_2^2 - 4X_2 \leq 0$ et $-16 - 8X_2^2 + 20X_2 \leq 0$ et donc $G'(X_1) \leq 0$.

Finalement :

$$\begin{aligned}\max G\left(X_1\right) &= G\left(0\right) = \frac{1}{64}\left(-2+X_2\right)\left(-6X_2+3X_2^2+4\right)\\ &= \frac{1}{64}\left(\mu-1\right)\left(1+3\mu^2\right) < 0.\end{aligned}$$

Il résulte de ce calcul que B_1 est toujours strictement concave $\forall \mu_1 \in]-1,1[; \forall \mu \in]-1,-\frac{1}{3}]$.

2) Montrons ensuite que B_2 est strictement concave en $\mu_1 = \mu$.

Pour cela posons :

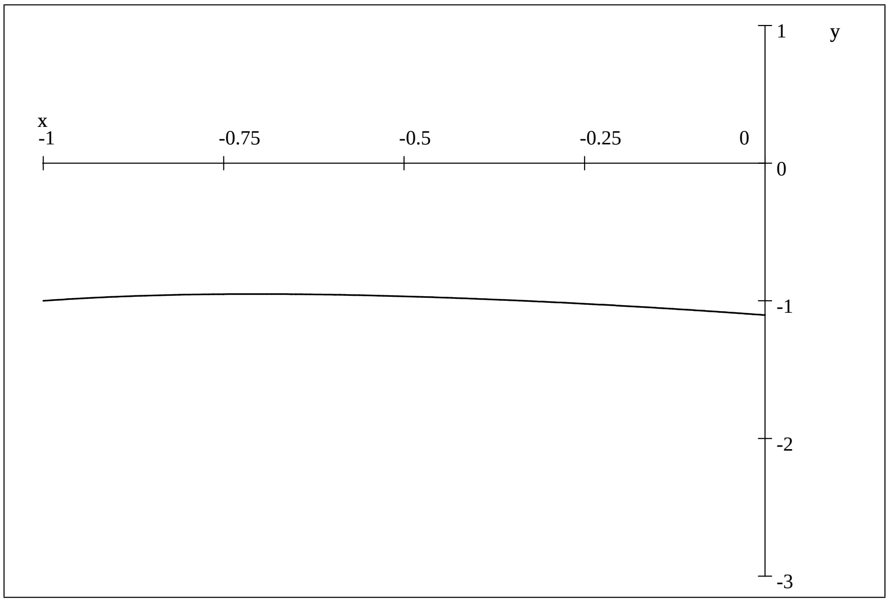
$$W(\mu_1) = \frac{d^2(B_2(X_1))}{dX_1^2} = R\frac{3RX_1^2-1}{\left(1+RX_1^2\right)^3} = R\frac{3R(1+\mu_1)^2-1}{\left(1+R(1+\mu_1)^2\right)^3}$$

et constatons que pour $\mu_1 = \mu$ ce terme est négatif ; clairement $W(\mu) < 0$ si et seulement si $3R(1+\mu)^2 - 1 < 0$

ceci équivaut à :

$$3\frac{\mu^4+8\mu^3+12\mu^2-8\mu-29+\sqrt{\left(\mu-1\right)\left(\mu^4+8\mu^3+6\mu^2-16\mu-31\right)\left(\mu+3\right)^3}}{2\left(3\mu+1\right)\left(\mu+1\right)} - 1 < 0$$

Ce qui est toujours vrai !



D'une façon générale, $B(\mu_1)$ est strictement concave jusqu'à μ_c défini par

$$3R(1+\mu_c)^2 = 1 \qquad \blacksquare$$

Preuve de la proposition 2.

Soit μ l'unique solution de l'équation $R = F(\mu)$. D'après celle-ci, si $R = 0, \mu = \mu^* = \frac{-1}{3}$ et si $R > 0$, alors $\mu = \mu^{**} \in]-1, -\frac{1}{3}]$. Nous ne pouvons cependant affirmer que μ est un équilibre de Nash symétrique sur $]-1, 1[$ tant que n'avons pas établi :

$$\forall \mu_1 \in]-1,1[,\ B(\mu_1) \leq B(\mu)$$

Nous savons seulement pour l'instant que $\mu_1 = \mu$, point stationnaire de $B(\mu_1)$ vérifiant $\left.\frac{d^2(B(\mu_1))}{d^2\mu_1}\right|_{\mu_1=\mu} < 0$ est un maximum local de $B(\mu_1)$.

Comme $B(\mu_1)$ est strictement concave jusqu'à μ_c défini par

$$3R(1+\mu_c)^2 = 1,$$

nous pouvons aussi affirmer que $B(\mu_1) < B(\mu)$ pour tout μ_1 dans $]-1, \mu_c]$ mais rien au delà de μ_c. Notons

$$\mu_0 = \frac{\mu+1}{3\mu-1},$$

la valeur pour laquelle B_1est maximale.

Si $\mu_0 \leq \mu_c$ alors μ est un équilibre de Nash symétrique sur $]-1, 1[$ en entier ! Cela vient du fait que si $\mu_1 \geq \mu_0$, alors $B_1(\mu_1)$ et $B_2(\mu_1)$ sont décroissantes et donc :

$$\forall \mu_1 > \mu_c \geq \mu_0, \quad B(\mu_1) = B_1(\mu_1)+B_2(\mu_1) \leq B_1(\mu_0)+B_2(\mu_0) = B(\mu_0) \leq B(\mu).$$

Si $\mu_0 > \mu_c$ montrer que

$$\forall \mu_1 \in [\mu_c, \mu_0]\,,\ B(\mu_1) \leq B(\mu)$$

revient à établir que μ est un équilibre de Nash symétrique sur $]-1, 1[$ en entier car à nouveau si $\mu_1 \geq \mu_0$, alors $B_1(\mu_1)$ et $B_2(\mu_1)$ sont décroissantes et donc :

$$B(\mu_1) = B_1(\mu_1) + B_2(\mu_1) \leq B_1(\mu_0) + B_2(\mu_0) = B(\mu_0) \leq B(\mu).$$

Travaillons donc pour $\mu_1 \in [\mu_c, \mu_0]$:

$$B(\mu_1) - B(\mu) = \frac{(-1+\mu\mu_1)(-1+\mu_1)}{(-3+\mu_1+\mu+\mu\mu_1)^2} + \frac{1}{2\left(1+R(\mu_1+1)^2\right)} - \left[\frac{\mu+1}{(\mu+3)^2} + \frac{1}{2\left(1+R(\mu+1)^2\right)}\right]$$

la croissance de B_1 et la décroissance de B_2 sur cet intervalle impliquent :

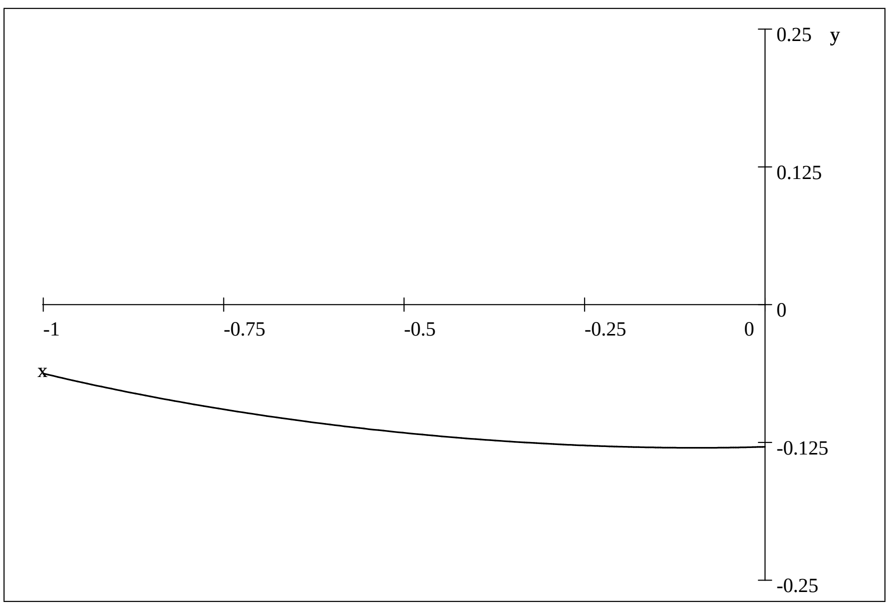
$$B(\mu_1)-B(\mu) \leq \frac{(-1+\mu\mu_0)(-1+\mu_0)}{(-3+\mu_0+\mu+\mu\mu_0)^2}+\frac{1}{2\left(1+R(\mu_c+1)^2\right)}-\left[\frac{\mu+1}{(\mu+3)^2}+\frac{1}{2\left(1+R(\mu+1)^2\right)}\right]$$

$$B(\mu_1)-B(\mu) \leq \frac{\left(-1+\mu\frac{\mu+1}{3\mu-1}\right)\left(-1+\frac{\mu+1}{3\mu-1}\right)}{\left(-3+\frac{\mu+1}{3\mu-1}+\mu+\mu\frac{\mu+1}{3\mu-1}\right)^2}+\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{3}\right)}-\left[\frac{\mu+1}{(\mu+3)^2}+\frac{1}{2\left(1+R(\mu+1)^2\right)}\right]$$

$$B(\mu_1)-B(\mu) \leq \frac{1}{8}\frac{3\mu-4}{\mu-1}-\frac{\mu+1}{(\mu+3)^2}-\frac{1}{2+2R(\mu+1)^2}=w(\mu)$$

mais $w(\mu)$ est sur $]-1,-\frac{1}{3}]$ la fonction toujours négative :

$$\frac{1}{8}\frac{3\mu^3+6\mu^2+3\mu-28}{(\mu-1)(\mu+3)^2}-\frac{(3\mu+1)(\mu+1)}{18\mu^2-27+\mu^4+8\mu^3+\sqrt{\left((\mu-1)(\mu^4+8\mu^3+6\mu^2-16\mu-31)(\mu+3)^3\right)}}$$



Ceci achève de prouver que μ est bien un équilibre de Nash symétrique et qu'il est unique.■

Preuve de la proposition 3.

Soit μ l'équilibre de Nash dont l'existence a été prouvée dans la proposition 2.

La fonction $B(\mu)$ est continue et strictement croissante de $]-1,-\frac{1}{3}]$ dans $]\frac{1}{2}-\bar{y},\frac{9}{16}-\overline{y}]$. Elle admet donc une fonction inverse B^{-1} strictement croissante de $]\frac{1}{2}-\bar{y},\frac{9}{16}-\overline{y}]$ dans $]-1,-\frac{1}{3}]$

Si le coût d'entrée f est compris entre $\frac{1}{2}-\bar{y}$ et $\frac{9}{16}-\overline{y}$, il existe μ_f^E dans $]-1,-\frac{1}{3}]$ tel que

$$f=B(\mu_f^E)=B(F^{-1}(R_f^E))$$

où R_f^E désigne le niveau d'aversion au risque du dirigeant auquel on a proposé un contrat avec μ_f^E.

Si $B(\mu)=f$, alors $B(\mu)=B(\mu_f^E)$ et par univocité de la fonction B, $\mu=\mu_f^E$. On en déduit que $F^{-1}(R)=F^{-1}(R_f^E)$ et donc $R=R_f^E$.

De la même façon, si $B(\mu)>f$, alors $B(\mu)>B(\mu_f^E)$ et la croissance de B implique que $\mu>\mu_f^E$. On en déduit que $F^{-1}(R)>F^{-1}(R_f^E)$ et donc, par décroissance de F^{-1} , $R<R_f^E$. ■

Preuve de la proposition 5

Pour un même dirigeant, la différence de profit des actionnaires avec EPR et sans EPR s'écrit :

$$\Delta B = B(\mu) - B_0 = \frac{1+\mu}{(\mu+3)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+R\,(1+\mu)^2} - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+R}\right)$$

L'étude globale de la fonction ΔB : $\mu \to \frac{1+\mu}{(\mu+3)^2} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+F(\mu)(1+\mu)^2} - \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+F(\mu)}\right)$ montre l'existence d'une valeur strictement positive $R = R_0 = F(\mu_0)$ pour laquelle il n'y a pas de différence entre EPR et EPA : $\Delta B(\mu_0) = 0$. Alors que pour $\mu < \mu_0$, on a $\Delta B(\mu) > 0$ et pour $\mu > \mu_0$, on a $\Delta B(\mu) < 0$.

Pour comprendre l'évolution de la variation ΔB, décomposons la en deux termes :

$$\Delta B = \Delta B_1 + \Delta B_2 = -\left[\frac{1}{9}\mu\frac{-3+\mu}{(\mu+3)^2}\right] + \left[\frac{1}{2}\frac{1}{1+R\,(1+\mu)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+R}\right]$$

où le terme $\Delta B_1 = -\frac{1}{9}\mu\frac{-3+\mu}{(\mu+3)^2}$ mesure l'écart de profit dû aux interactions stratégiques et où $\Delta B_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{1+R(1+\mu)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+R}$ évalue l'impact de l'aversion au risque des dirigeants dans les deux situations.

Il est facile de voir quand $\mu \in]-1, -\frac{1}{3}]$ que $\Delta B_1 = -\left[\frac{1}{9}\mu\frac{-3+\mu}{(\mu+3)^2}\right]$ est une fonction croissante de μ toujours négative. Quand les dirigeants sont de moins en moins sensibles au risque, $|\mu|$ diminue et l'écart de profit dû aux interactions stratégiques est de moins en moins marqué entre EPR et EPA. L'écart étant moins valorisé, la concurrence est moins exacerbée et les firmes, moins agressives, produisent moins. D'un point de vue stratégique le profit d'exploitation est plus grand en situation d'EPA qu'en situation d'EPR. Par contre $\Delta B_2 = \frac{1}{2}\frac{1}{1+F(\mu)(1+\mu)^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+F(\mu)}$ est une fonction décroissante de μ toujours positive. Le comportement est le même, si les dirigeants sont de moins en moins sensibles au risque, $|\mu|$ diminue et l'écart de profit dû à l'aversion au risque est de moins en moins marqué entre EPR et EPA. Simplement ici le profit d'exploitation est plus grand en situation d'EPR et l'est d'autant plus que μ est proche de -1. Il y a opposition de signe entre les deux termes ΔB_i et donc possibilité d'arbitage !

Si $R < R_0$	Si $R = R_0$	Si $R > R_0$
$\Delta B < 0$	$\Delta B = 0$	$\Delta B > 0$

Effectivement chacun des termes prend successivement l'ascendant sur l'autre au fur et à mesure que l'on considére des dirigeants de moins en moins sensibles au risque.■

Preuve de la proposition 6

Soit $R = F(\mu)$, d'après la proposition 5, si $R < R_0$ alors la différence de profit des actionnaires avec EPR et sans EPR est strictement négative : $\Delta B = B(\mu) - B_0 < 0$. Si bien que tous les coûts fixes d'entrée f de la forme :

$$f = B(\mu) - k\Delta B \text{ avec } 0 \leq k \leq 1$$

vérifient : $\left\{ \begin{array}{c} B_0 - f = (1-k)(-\Delta B) > 0 \\ \text{et} \\ B(\mu) - f = k\Delta B < 0 \end{array} \right.$. L'entrée est possible avec EPA mais pas avec EPR.

Si $R > R_0$ alors la différence de profit des actionnaires avec EPR et sans EPR est strictement positive : $\Delta B = B(\mu) - B_0 > 0$. Si bien que tous les coûts fixes d'entrée f de la forme :

$$f = B(\mu) + k\Delta B \text{ avec } 0 \leq k \leq 1$$

vérifient : $\left\{ \begin{array}{c} B_0 - f < 0 \\ \text{et} \\ B(\mu) - f > 0 \end{array} \right.$. L'entrée est possible avec EPR mais pas sans EPR.■