Chapitre 10. Le problème du voyageur de commerce – Solutions

1. La perceuse robotisée

(a) Il y a (13 – 1)! / 2 = 12! / 2 = 239 500 800 solutions admissibles.

(b) Voici un cycle de perçages obtenu selon la logique gourmande (méthode SLPP) en prenant le point 1 comme point de départ :

1 – 2 – 10 – 8 – 4 – 12 – 3 – 9 – 6 – 11 – 7 – 13 – 5 – 1.

La longueur de ce cycle est de 41,33.

(c) En utilisant les critères CTPI-1 et CSIT-1 avec 1 comme point de départ, on obtient la tournée hamiltonienne

1 – 2 – 10 – 9 – 3 – 12 – 4 – 11 – 6 – 7 – 8 – 13 – 5 – 1

de longueur 37,22. Le tableau suivant résume la séquence des insertions.

Nº de l'insertion	Sommet inséré	Tournée partielle
0 (tournée initiale)	–	1–2–1
1	10 entre 2 et 1	1–2–10–1
2	8 entre 10 et 1	1–2–10–8–1
3	13 entre 8 et 1	1–2–10–8–13–1
4	5 entre 13 et 1	1–2–10–8–13–5–1
5	4 entre 10 et 8	1–2–10–4–8–13–5–1
6	12 entre 10 et 4	1–2–10–12–4–8–13–5–1
7	3 entre 10 et 12	1–2–10–3–12–4–8–13–5–1
8	9 entre 10 et 3	1–2–10–9–3–12–4–8–13–5–1
9	6 entre 4 et 8	1–2–10–9–3–12–4–6–8–13–5–1
10	11 entre 4 et 6	1–2–10–9–3–12–4–11–6–8–13–5–1
11	7 entre 6 et 8	1–2–10–9–3–12–4–11–6–7–8–13–5–1

Note. La feuille (c) du fichier MPTA-01.xlsx décrit en détails la procédure CSIT-1.

(d) La meilleure borne supérieure – la plus petite – est la longueur 37,22 du cycle obtenu en réponse à la question (c). Il existe plusieurs façons d'obtenir une borne inférieure sur la longueur d'une tournée optimale. Toutefois ce sujet déborde du cadre de ce livre. Une borne inférieure triviale est obtenue en multipliant le nombre d'arêtes dans la tournée par la distance séparant les deux endroits les plus près l'un de l'autre, soit les points 3 et 12; on obtient ainsi la borne inférieure $13 \times 1 = 13$.

Note. Le tableau ci-dessous donne les différentes solutions admissibles obtenues selon la logique gourmande en prenant comme point de départ chacun des 13 endroits où la perceuse doit percer un trou. Les tournées obtenues en prenant comme point de départ les endroits 4, 6 et 7 conduisent essentiellement à la même solution initiale de longueur 37,22. On peut montrer qu'il s'agit d'une solution optimale.

Point de départ	Solution	Longueur
1	1–2–10–8–4–12–3–9–6–11–7–13–5–1	41,33
2	2–10–8–4–12–3–9–6–11–7–13–5–1–2	41,33
3	3–12–4–8–10–2–1–5–13–7–6–11–9–3	39,33
4	**4–12–3–9–10–2–1–5–13–8–7–6–11–4**	**37,22**
5	5–13–10–2–1–8–4–12–3–9–6–11–7–5	46,03
6	**6–11–4–12–3–9–10–2–1–5–13–8–7–6**	**37,22**
7	**7–6–11–4–12–3–9–10–2–1–5–13–8–7**	**37.22**
8	8–10–2–1–5–13–7–6–11–4–12–3–9–8	37,42
9	9–3–12–4–8–10–2–1–5–13–7–6–11–9	39,33
10	10–2–1–5–13–8–4–12–3–9–6–11–7–10	43,49
11	11–6–7–8–10–2–1–5–13– 4– 12–3–9–11	41,89
12	12–3–4–8–10–2–1–5–13–7–6–11–9–12	40,70
13	13–5–10–2–1–8–4–12–3–9–6–11–7–13	44,97

2. Chez Transport HenriD

(a) En utilisant les critères CTPI-1 et CSIT-1 avec 1 comme point de départ, on obtient la tournée

1 – 3 – 6 – 9 – 5 – 2 – 7 – 4 – 8 – 1

de longueur 42,99. Le tableau suivant résume la séquence des insertions.

Nº de l'insertion	Sommet inséré	Tournée partielle
0 (tournée initiale)	–	1–8–1
1	2 entre 1 et 8	1–2–8–1
2	7 entre 2 et 8	1–2–7–8–1
3	4 entre 7 et 8	1–2–7–4–8–1
4	9 entre 1 et 2	1–9–2–7–4–8–1
5	6 entre 1 et 9	1–6–9–2–7–4–8–1
6	3 entre 1 et 6	1–3–6–9–2–7–4–8–1
7	5 entre 9 et 2	1–3–6–9–5–2–7–4–8–1

A priori, rien n'empêche cette tournée d'être optimale. Cependant, il est peu plausible qu'elle le soit, compte tenu de la remarque aux pages 464 et 465 à l'effet que «c'est cette variante [CTPI-2 et CSIT-2] qui, en moyenne, donne les meilleurs résultats».

(b) Longueur = 9,43 + 3,16 + 6,08 + 4,24 + 9,49 + 2,24 + 5,39 + 7 + 1 = 48,03

(c) En utilisant les critères CTPI-3 et CSIT-2, on obtient la tournée

1 – 8 – 2 – 4 – 7 – 5 – 9 – 6 – 3 – 1

de longueur 42,39. On observe que cette tournée est plus courte que celles obtenues en (a) et en (b). Le tableau suivant résume la séquence des insertions.

Nº de l'insertion	Sommet inséré	Tournée partielle
0 (tournée initiale)	–	1–8–4–7–5–6–3–1
1	9 entre 5 et 6	1–8–4–7–5–9–6–3–1
2	2 entre 8 et 4	1–8–2–4–7–5–9–6–3–1

(d) L'approche visuelle basée sur l'intuition donne souvent des solutions assez éloignées de la solution optimale. De plus, tel que noté à la page 455, «la longueur du chemin le plus court entre deux villes données dépend du réseau routier existant et n'est pas nécessairement proportionnelle à la longueur du trajet à vol d'oiseau entre ces deux villes».

(e) La méthode 2-OPT suggère de remplacer les arêtes 65 et 97 par les arêtes 69 et 57. La tournée résultante

1 – 3 – 6 – 9 – 5 – 7 – 2 – 4 – 8 – 1

est de longueur 48,03 – 3,48 = 44,55.

4. Un premier problème asymétrique

(a) Prenons le sommet 1 comme point de départ. La logique gourmande (méthode SLPP) propose comme solution la tournée hamiltonienne

1 – 5 – 3 – 8 – 6 – 7 – 2 – 4 – 1

dont la longueur est de 156.

(b) La solution optimale du problème d'affectation, dont la valeur optimale est égale à 119, conduit aux cycles 1–2–7–1 et 3–8–4–6–5–3. Pour regrouper ces deux tournées partielles tout en subissant une pénalité minimale, il faut ôter les arcs 12 et 84 pour les remplacer par les arcs 14 et 82. La pénalité encourue est de 6. La tournée résultante

1 – 4 – 6 – 5 – 3 – 8 – 2 – 7 – 1

est de longueur 119 + 6 = 125.

5. Un second problème asymétrique

(a) Prenons le sommet 1 comme point de départ. La logique gourmande (méthode SLPP) propose comme solution la tournée hamiltonienne

1 – 5 – 2 – 6 – 4 – 3 – 1

dont la longueur est 8 + 3 + 3 + 46 + 35 + 42 = 156.

(b) La solution optimale du problème d'affectation, dont la valeur optimale est égale à 106, conduit aux cycles 1–4–6–5–1 et 2–3–2. Pour regrouper ces deux tournées partielles tout en subissant une pénalité minimale, il faut ôter les arcs 51 et 32 pour les remplacer par les arcs 52 et 31. La pénalité encourue est de 7. La tournée résultante

1 – 4 – 6 – 5 – 2 – 3 – 1

est de longueur 106 + 7 = 113.

6. La méthode 2-OPT

(a) La méthode 2-OPT suggère de remplacer les arêtes 72 et 48 par les arêtes 74 et 28. La tournée résultante

1 – 3 – 6 – 9 – 5 – 7 – 4 – 2 – 8 – 1

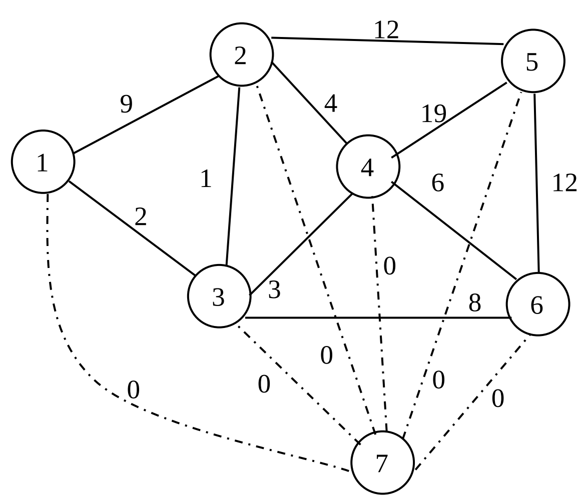
est de longueur 44,55 – 2,17 = 42,39.

(b) La méthode 2-OPT ne permet pas d'améliorer la tournée obtenue à la question (a) de l'exercice 2, car les quantités $\Delta(i, j)$ sont toutes positives. Et pourtant cette tournée n'est pas optimale, comme le montre la tournée construite à la question précédente. Cet exemple illustre la remarque de la page 471 à l'effet que «dans d'autres exemples, la méthode 2-OPT ne permet pas d'atteindre une tournée de longueur minimale.»

8. Chaîne hamiltonienne

(a) Si l'on choisit – arbitrairement – le sommet 1 comme point de départ de la chaîne, les arêtes 13 et 23 s'imposent selon la logique gourmande. On complète en ajoutant les arêtes 24, 46 et 56 pour obtenir la chaîne hamiltonienne 1–3–2–4–6–5 de longueur 25.

(b) Considérons le réseau *G*' illustré ci-dessous. Toute chaîne hamiltonienne dans *G* de longueur *L* correspond à une tournée hamiltonienne dans *G*' de même longueur. L'inverse est vrai. Pour trouver une chaîne hamiltonienne de longueur minimale dans *G*, il suffit donc de résoudre le PVC associé au graphe *G*'. On obtient la tournée trouvée en (a). Notre œil nous a donc bien guidés…



9. Sonars

Convenons d'abord de numéroter les sites à visiter : le quai se verra attribuer le numéro 1, tandis que les sonars seront désignés ici comme sommets numéros 2, 3, etc. (ainsi, le sonar S3 correspond au sommet 4). Le tableau ci-dessous décrit la séquence des insertions.

Nº de l'insertion	Sommet inséré	Tournée partielle
0 (tournée initiale)	–	1–13–1
1	2 entre 1 et 13	1–2–13–1
2	8 entre 13 et 1	1–2–13–8–1
3	3 entre 8 et 1	1–2–13–8–3–1
4	6 entre 2 et 13	1–2–6–13–8–3–1
5	12 entre 13 et 8	1–2–6–13–12–8–3–1
6	4 entre 1 et 2	1–4–2–6–13–12–8–3–1
7*	5 entre 6 et 1	1–4–2–5–6–13–12–8–3–1
8	7 entre 8 et 3	1–4–2–5–6–13–12–8–7–3–1
9	11 entre 13 et 12	1–4–2–5–6–13–11–12–8–7–3–1
10	10 entre 2 et 5	1–4–2–10–5–6–13–11–12–8–7–3–1
11	9 entre 6 et 13	1–4–2–10–5–6–9–13–11–12–8–7–3–1

* Lors de l'étape 7, les sommets 5 et 7 étaient à égalité et celui de plus petit numéro a été retenu.

Cette tournée initiale H0, qui est de longueur 205, peut être améliorée en recourant à la méthode 2-OPT. En un premier temps, on retire les arêtes 69 et (2; 10) de la tournée H0 et on ajoute les arêtes 26 et (10; 9), ce qui permet de réduire la longueur de 12 unités. La tournée résultante H1, prend la forme suivante :

1 – 4 – 2 – 6 – 5 – 10 – 9 – 13 – 11 – 12 – 8 – 7 – 3 – 1.

La seconde itération de la méthode 2-OPT suggère de remplacer les arêtes 26 et (5; 10) de H1 par les arêtes 25 et (6; 10). Le gain est cette fois de 10 unités et la tournée résultante H2 s'écrit :

1 – 4 – 2 – 5 – 6 – 10 – 9 – 13 – 11 – 12 – 8 – 7 – 3 – 1.

Une 3^{e} itération de la méthode nous amène à éliminer les arêtes 73 et 14 et à les remplacer par 17 et 43, pour un gain de 4 unités. La tournée résultante H3,

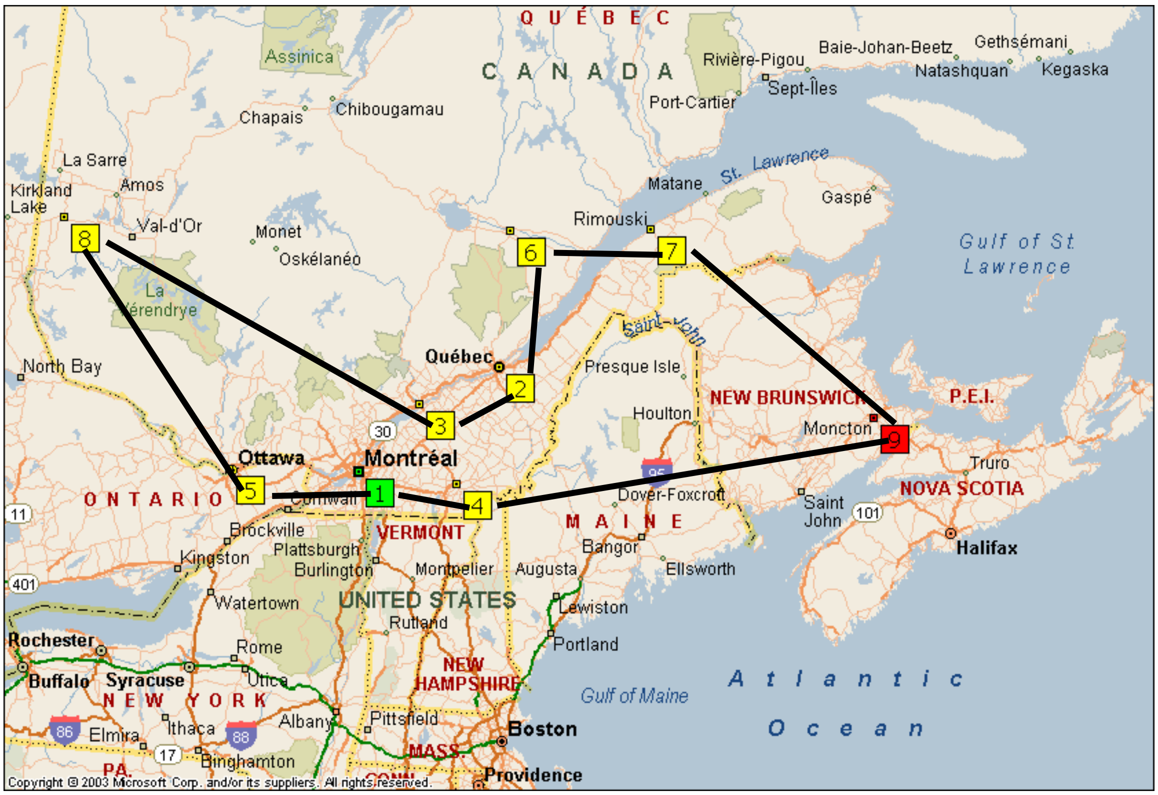
1 – 4 – 2 – 5 – 6 – 10 – 9 – 13 – 11 – 12 – 8 – 7 – 3 – 1,

qui est de longueur 205 – 12 – 10 – 4 = 179 unité, ne peut être améliorée par la méthode 2-OPT et la procédure s'arrête.

Le navire partira donc du quai et visitera les sonars dans l'ordre S3, S1, S4, S5, S9, S8, S12, S10, S11, S7, S6 et S2. Il parcourra 1790 kilomètres.

10. La tournée d’un orchestre de chambre

Voici une carte des villes à visiter, ainsi que la tournée obtenue en utilisant les critères CTPI-2 et CSIT-2. Il s’agit d’une tournée optimale; par conséquent, aucune amélioration 2-OPT ne peut y être effectuée. Cette tournée est de longueur 3413 km.



Le tableau ci-dessous décrit la séquence des insertions.

Nº de l’insertion	Sommet inséré	Tournée partielle
0 (tournée initiale)	–	1–9–1
1	8 entre 1 et 9	1–8–9–1
2	7 entre 8 et 9	1–8–7–9–1
3	2 entre 8 et 7	1–8–2–7–9–1
4	6 entre 2 et 7	1–8–2–6–7–9–1
5	5 entre 1 et 8	1–5–8–2–6–7–9–1
6	4 entre 9 et 1	1–5–8–2–6–7–9–4–1
7	3 entre 8 et 2	1–5–8–3–2–6–7–9–4–1

11. Un jeu de piste

Convenons de numéroter 9 le sommet associé au camp et de prendre ce sommet 9 comme point de départ de la tournée recherchée. Le tableau ci-dessous décrit la séquence des insertions.

Nº de l'insertion	Sommet inséré	Tournée partielle
0 (tournée initiale)	–	9–6–9
1	3 entre 1 et 9	9–3–6–9
2	8 entre 6 et 9	9–3–6–8–9
3	1 entre 8 et 9	9–3–6–8–1–9
4	5 entre 9 et 3	9–5–3–6–8–1–9
5	4 entre 1 et 9	9–5–3–6–8–1–4–9
6	7 entre 3 et 6	9–5–3–7–6–8–1–4–9
7	2 entre 4 et 9	9–5–3–7–6–8–1–4–2–9

Cette tournée initiale ne peut être améliorée par la méthode 2-OPT. Ainsi, pour maximiser leurs chances dans ce jeu de piste, Grand Totem et Petit Poncho devraient, au départ du camp de base, visiter les huit boîtes dans l'ordre 5, 3, 7, 6, 8, 1, 4, et 2; ce parcours, en incluant les trajets entre le camp et les boîtes 5 et 2, leur prendra 131 minutes.

12. Leïla, agente d'immeubles

(a) Soit G, le réseau représenté dans l'énoncé de l'exercice. Et soit G_A, le réseau complet comportant les sommets 1, 2, 3, 4 et Z, et dans lequel la longueur d'une arête ij est la longueur d'une CLPC entre les extrémités i et j dans le réseau G. Le tableau ci-dessous donne ces longueurs.

i \ *j*	**2**	**3**	**4**	**Z**
1	3	8	8	9
2	–	7	5	12
3	–	–	12	6
4	–	–	–	17

On cherche une tournée hamiltonienne de longueur minimale dans G_A. À cet effet, on construit un modèle linéaire selon l'approche décrite dans la section des compléments (pages 478 et 479). L'objectif est de minimiser la longueur z de la tournée hamiltonienne recherchée par Leïla, qui se calcule comme suit :

$$z = 3\,x_{12} + 8\,x_{13} + 8\,x_{14} + 9\,x_{1Z} + 7\,x_{23} + 5\,x_{24} + 12\,x_{2Z} + 12\,x_{34} + 3\,x_{3Z} + 17\,x_{4Z}\ ,$$

où les variables de décision x_{ij} sont des variables binaires définies de la façon suivante :

$$x_{ij} = 1 \text{ si l'arête } ij \text{ appartient à la tournée.}$$

Le modèle contient 5 contraintes technologiques, une pour chacun des sommets du réseau G_A. Voici celles associées aux sommets 1 et Z :

Sommet 1 $\quad x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{1Z} = 1$

Sommet Z $x_{1Z} + x_{2Z} + x_{3Z} + x_{4Z} = 1$.

Le modèle donne directement une solution optimale qui correspond à une tournée hamiltonienne : Leïla devrait partir de son bureau Z, visiter les quatre maisons qu'elle a inscrites au registre dans l'ordre 1, 3, 4 et 2, puis revenir en Z; ce trajet lui prendra 35 minutes. Ce trajet correspond, dans *G*, à la chaîne Z – 5 – 1 – 8 – A – 3 – A – 2 – 4 – 2 – A – 8 – 1 – 5 – Z.

(b) Cette fois, on cherche une tournée hamiltonienne de longueur minimale dans le réseau complet G_B dont les sommets sont 1, 2, 3, 4, Z, A, B et C, et dont les longueurs des arêtes *ij* correspondent aux longueurs des CLPC entre *i* et *j* dans le réseau *G*. Le tableau ci-dessous donne les longueurs des arêtes de G_B.

i \ *j*	**2**	**3**	**4**	**Z**	**A**	**B**	**C**
1	3	8	8	9	2	8	8
2	–	7	5	12	1	6	9
3	–	–	12	6	6	13	14
4	–	–	–	17	6	4	7
Z	–	–	–	–	11	17	17
A	–	–	–	–	–	7	8
B	–	–	–	–	–	–	3

On utilise un modèle linéaire semblable à celui considéré à la question précédente. La solution optimale obtenue comporte deux cycles Z – 1 – A – 2 – 3 – Z et B – 4 – C – B. On ajoute deux contraintes pour interdire explicitement ces cycles :

Cycle 1 $x_{12} + x_{13} + x_{1Z} + x_{1A} + x_{23} + x_{2Z} + x_{2A} + x_{3Z} + x_{3A} + x_{ZA} \leq 4$

Cycle 2 $x_{4B} + x_{4C} + x_{BC} \leq 2$.

La solution optimale obtenue alors correspond à une tournée hamiltonienne : Leïla devrait partir de son bureau Z, visiter les maisons dans l'ordre 1, C, B, 4, 2, A et 3, puis revenir en Z; ce trajet lui prendra 42 minutes. Ce trajet correspond, dans *G*, à la chaîne Z – 5 – 1 – 8 – C – B – 4 – 2 – A – 3 – 6 – Z.

13. La course aux débiteurs

(a) Il s'agit de trouver une chaîne hamiltonienne dont le point d'arrivée est la résidence d'André et qui est de longueur minimale. On ramène ce problème à un PVC symétrique en ajoutant un 11e point, noté P disons, dont la distance à tous les débiteurs est égale à un constante *M* élevée et telle que $d_{AP} = 0$. Le modèle linéaire construit selon l'approche décrite dans la section des compléments (pages 478 et 479) indique que la tournée suivante

P – A – B – F – G – E – C – J – H – I – D – P

est optimale et de longueur $M + 127$. Par conséquent, Johnny devrait visiter les débiteurs selon la séquence D – I – H – J – C – E – G – F – B, puis de là se rendre chez André. L'ensemble des déplacements exigera 127 minutes.

(b) Les rencontres avec les débiteurs prendront $2 \times 9 = 18$ minutes. Au total, Johnny mettra $127 + 18 = 145$ minutes pour recueillir l'argent et le porter à André. Il devrait donc débuter sa tournée chez le débiteur D à 13h15 au plus tard.

14. La ronde du vigile

(a) On considère ici que, pour toute arête du graphe G, la durée hors service coïncide avec la durée en service. Les sommets impairs de G sont B, C, D, F, J, K, O, Q, R et S. Pour déterminer une ronde minimale du vigile, on résout d'abord le modèle linéaire de l'appariement de poids minimal des dix sommets impairs (voir pages 408 et 409). À cette fin, on construit en un premier temps le réseau non orienté complet G^C des appariements possibles : les sommets de G^C sont les sommets impairs de G; la longueur d'une arête ij de G^C est la longueur d'un CLPC entre ces sommets dans G. Le tableau suivant énumère les longueurs de ces arêtes.

i \ *j*	**C**	**D**	**F**	**J**	**K**	**O**	**Q**	**R**	**S**
B	50	100	110	210	170	270	180	230	280
C	–	50	160	160	220	220	230	180	230
D	–	–	210	110	270	170	280	230	180
F	–	–	–	200	60	260	170	220	270
J	–	–	–	–	260	60	270	220	170
K	–	–	–	–	–	200	110	160	210
O	–	–	–	–	–	–	210	160	110
Q	–	–	–	–	–	–	–	50	100
R	–	–	–	–	–	–	–	–	50

Ensuite, pour toute arête ij de G^C, on introduit des variables binaires x_{ij} définies de la façon suivante :

$x_{ij} = 1$ si l'arête ij de G^C est choisie pour apparier i et j.

L'objectif est de minimiser la longueur totale z des arêtes ajoutées pour l'appariement, où

$$z = 50\, x_{BC} + 100\, x_{BD} + 110\, x_{BF} + 210\, x_{BJ} + 170\, x_{BK} + \ldots + 110\, x_{QS} + 50\, x_{RS}.$$

Le modèle comporte dix contraintes technologiques nommées «Sommet *i*», où *i* est l'un des sommets impairs de G. Voici deux de ces contraintes :

Sommet B $\quad x_{BC} + x_{BD} + x_{BF} + x_{BJ} + x_{BK} + x_{BO} + x_{BQ} + x_{BR} + x_{BS} = 1$

Sommet K $\quad x_{BK} + x_{DK} + x_{FK} + x_{JK} + x_{BK} + x_{KO} + x_{KQ} + x_{KR} + x_{KS} = 1.$

Une solution optimale recommande d'apparier B et C, D et J, F et K, O et S, de même que Q et R. Nous ajoutons donc des copies des arêtes BC, FK et QR; deux chaînes de longueur minimale permettent de relier dans G les sommets D et J, de même que O et S; nous avons choisi d'introduire des copies des arêtes des chaînes D – E – J et O – T – S. La longueur totale des copies d'arêtes est de 380 unités.

Une ronde minimale du vigile couvrira donc 380 + (16 × 50) + (15 × 60) = 2080 mètres. Il en existe plusieurs. En voici une : A – B – G – F – K – P – Q – L – G – H – I – N – S – T – O – T – S – R – Q – R – M – H – C – B – C – D – E – J – I – D – E – J – O – N – M – L – K – F – A.

(b) En utilisant les critères CTPI-3 et CSIT-2 avec A comme point de départ, on obtient la tournée hamiltonienne

A – B – G – L – M – N – I – H – C – D – E – J – O – T – S – R – Q – P – K – F – A

de longueur 1100. Le tableau suivant résume la séquence des insertions.

Nº de l'insertion	Sommet inséré	Tournée partielle
0 (tournée initiale)	–	A–B–C–D–E–J–O–T–S–R–Q–P–K–F–A
1	H entre B et C	A–B–H–C–D–E–J–O–T–S–R–Q–P–K–F–A
2	M entre B et H	A–B–M–H–C–D–E–J–O–T–S–R–Q–P–K–F–A
3	G entre B et M	A–B–G–M–H–C–D–E–J–O–T–S–R–Q–P–K–F–A
4	I entre M et H	A–B–G–M–I–H–C–D–E–J–O–T–S–R–Q–P–K–F–A
5	L entre G et M	A–B–G–L–M–I–H–C–D–E–J–O–T–S–R–Q–P–K–F–A
6	N entre M et I	A–B–G–L–M–N–I–H–C–D–E–J–O–T–S–R–Q–P–K–F–A

Note. Lors des étapes 1, 3, 4 et 5, plusieurs sommets étaient à égalité selon le critère CSIT-2; dans chaque cas, nous avons inséré le sommet dont le numéro était le plus petit. La pénalité pour insérer le sommet I était la même, que I soit placé entre M et H, entre H et C, entre E et J, ou encore entre J et O; nous avons retenu la première option. Les insertions numéros 1 et 4 utilisent des arêtes de *G'* absentes de *G*, de sorte que les tournées partielles résultantes ne sont pas des tournées admissibles de *G*; l'admissibilité est rétablie lors des deux dernières étapes.

(c) Voici une tournée hamiltonienne de longueur 1060 : A – B – C – D – E – J – O – T – S – R – Q – P – K – L – M – N – I – H – G – F – A.

15. La maison d'été des Simard

(a) La distance d_{12} entre le point d'entrée 1 et le site du chantier 12 est de 23 unités. Il existe quatre CLPC entre les sommets 1 et 12 :

1 – 8 – 9 – 6 – 12

1 – 8 – 7 – 11 – 12

1 – 2 – 7 – 11 – 12

1 – 2 – 11 – 12.

(b) Par les deux premiers CLPC décrits à la question précédente, on peut acheminer un maximum de 6 tonnes du point d'entrée au site du chantier. Ce tonnage maximal est de 5 tonnes seulement par les deux autres CLPC.

(c) Le tonnage maximal que l'on peut acheminer du point d'entrée au site du chantier est de de 6 tonnes.

(d) Soient *G* le réseau illustré dans l'énoncé de l'exercice (on prend comme longueur d'une arête la longueur en kilomètres du tronçon routier correspondant); et *G'* le réseau obtenu de *G* en remplaçant les arêtes 23 et (3, 10) par une arête (2, 10) de longueur 10. Une tournée d'inspection des ponts correspond à une tournée eulérienne dans le réseau *G*'. Les sommets impairs de *G*' sont 8, 9, 11 et 12. L'appariement optimal de ces quatre sommets impairs est évidemment de relier 8 et 9, ainsi que 11 et 12. On ajoute donc des copies des arêtes 89 et (11, 12). Voici une tournée eulérienne dans le multiréseau résultant :

1 – 2 – 3 – 10 – 12 – 11 – 7 – 8 – 9 – 4 – 5 – 6 – 7 – 2 – 11 – 12 – 6 – 9 – 8 – 1.

(e) On reprend la «même» tournée, mais en commençant et terminant par la première occurrence de 12 dans la tournée ci-dessus :

12 – 11 – 7 – 8 – 9 – 4 – 5 – 6 – 7 – 2 – 11 – 12 – 6 – 9 – 8 – 1 – 2 – 3 – 10 – 12.

(f) Il s'agit de construire une tournée hamiltonienne au départ du sommet 1. À cette fin, nous utilisons un modèle linéaire construit selon l'approche décrite dans la section des compléments (pages 478 et 479). Ce modèle comporte, pour toute arête *ij* du réseau, une variable binaire notée x_{ij} et définie de la façon suivante :

$$x_{ij} = 1 \text{ si l'arête } ij \text{ appartient à la tournée.}$$

L'objectif est de minimiser la longueur totale z de la tournée :

$$\text{Min } z = 6\, x_{12} + 4\, x_{18} + 4\, x_{23} + 5\, x_{27} + 9\, x_{2,11} + 6\, x_{3,10} + \ldots + 15\, x_{10,12} + 8\, x_{11,12}.$$

Les contraintes technologiques, au nombre de 12, exige que chaque sommet soit incident à exactement deux arêtes de la tournée. Voici celles associées aux sommets 1 et 7.

Sommet 1 $\quad x_{12} + x_{18} = 2$

Sommet 7 $\quad x_{27} + x_{78} + x_{7,11} = 2.$

Une solution optimale donne :

$$z = 79 \quad \text{et} \quad x_{12} = x_{18} = x_{23} = x_{3,10} = x_{45} = x_{49} = x_{56} = x_{67} = x_{7,11} = x_{89} = x_{10,12} = x_{11,12}.$$

Voici une tournée optimale des douze sommets, dont la longueur totale est de 79 km :

1 – 2 – 3 – 10 – 12 – 11 – 7 – 6 – 5 – 4 – 9 – 8 – 1.